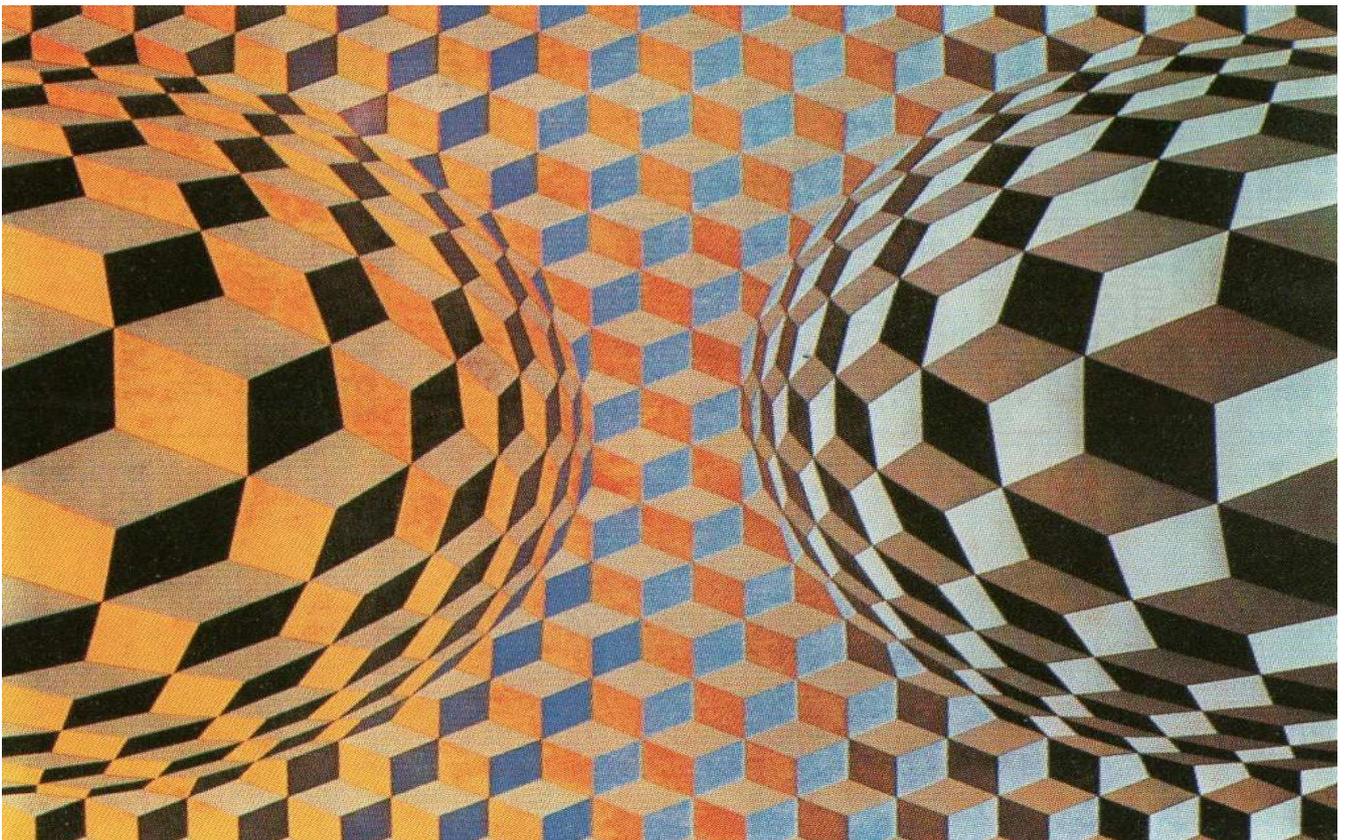


VACCARO GIOVANNI

≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈

SUSSIDIARIO di M A T E M A T I C A

GIOCO di STRUTTURE
SU UN MICRO-AMBIENTE
LE CONICHE



==== ∞∞∞∞∞∞ Tra Teoria, Calcolo e Storia ∞∞∞∞∞∞ =====

Risorse didattiche

per l'insegnante

e

per gli studenti appassionati della
matematica

Dedico questo scritto

Alla mia famiglia

e

A tutti i miei ex alunni

GEOMETRIA EUCLIDEA E CONICHE

1 Introduzione

Euclide e gli *Elementi* vengono spesso considerati appaiati, come se l'autore degli *Elementi* avesse scritto solo quell'opera di geometria. In realtà egli aveva prodotto una dozzina di trattati che coprivano vari argomenti: dall'ottica all'astronomia, dalla musica alla meccanica, così pure aveva scritto un libro sulle sezioni coniche. Tuttavia più della metà di ciò che scrisse è andato perduto, comprese alcune delle sue opere più importanti, come il trattato sulle coniche. Sembra che Euclide prendesse spunto dalla definizione stereometrica delle curve contenuta nell'opera di Menecmo e sviluppasse in modo indipendente le tre curve, come d'altronde fecero tutti gli autori prima di Apollonio. Infatti alcuni storici ritengono che la perdita di tale trattato di Euclide può essere attribuita al fatto che l'opera di Apollonio sulle coniche soppiantò tutte le opere precedenti per la completezza e l'ampiezza dei contenuti.

In questo capitolo, utilizzando gli argomenti della geometria euclidea, percorreremo l'impostazione stereometrica per ricavare la relazione di Apollonio e per giungere a determinare le coniche come luoghi geometrici, stabilendo proprietà e relazioni geometriche dei punti di tali figure. Pertanto è richiesto al lettore la conoscenza degli argomenti: concetti, postulati, teoremi, corollari, trattati negli *Elementi*: argomenti che costituiscono oggi la struttura portante di un testo di Geometria Razionale di un qualsiasi corso di scuola superiore. Qui verranno richiamati gli enunciati di postulati o di teoremi di geometria piana o di geometria solida che serviranno alle dimostrazioni che si andranno a sviluppare, essenziali alla comprensione dei risultati che si vorranno raggiungere. L'utilizzo di strutture algebriche sarà limitato al solo scopo di rendere più chiari e più snelli eventuali algoritmi operativi.

Richiami generali di stereometria

Postulato 1) Una linea piana semplice, chiusa non intrecciata, divide il piano in due regioni: così caratterizzate

- a) Dati due punti appartenenti alla stessa regione, esiste un arco di linea che non interseca la linea piana che delimita la regione
- b) Dati due punti appartenenti a regioni diverse, qualunque arco di linea che unisce i due punti interseca la linea piana che delimita le regioni.

Postulato 2) Tre punti non allineati appartengono ad un solo piano

Da questo postulato si deducono i seguenti lemmi

Lemma 1) Una retta ed un punto non appartenente ad essa individuano un solo piano

Lemma 2) Due rette che si intersecano appartengono ad un solo piano

Teorema 1) Se due piani hanno in comune un punto, allora hanno in comune una retta passante per quel punto

Da questo teorema discende la seguente definizione di retta nello spazio:

Def. 6) **La retta nello spazio è la figura intersezione di due piani aventi in comune un punto**

Teorema 2) Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano, allora essa è perpendicolare al piano

Teorema 3) Se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una qualunque retta del piano, questa risulta perpendicolare al piano individuato dalle prime due rette.

Def. 1) **Si chiama proiezione di un punto sopra un piano il piede della perpendicolare condotta dal punto al piano.**

Def. 1a) **Si chiama proiezione di una figura su un piano la figura costituita dalle proiezioni sopra il piano dei punti della figura data.**

Teorema 4) L'angolo acuto che una retta uscente obliquamente da un punto di un piano forma con la sua proiezione sul piano è minore dell'angolo che essa forma con ogni altra retta uscente da quel punto e giacente sul piano.

Da questo teorema discende la seguente definizione di angolo fra retta e piano:

Def. 2) **Si chiama angolo fra retta e piano l'angolo acuto che una retta forma con la sua proiezione sul piano.**

Def. 3) **Due piani si dicono paralleli quando non hanno alcun punto comune od hanno la medesima giacitura.**

Teorema 5) Se due rette, che si intersecano, sono parallele ad un piano, allora il loro piano è parallelo al piano dato.

Teorema 6) Due piani perpendicolari ad una stessa retta, in punti distinti, sono paralleli

Teorema 7) Le rette intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono rette parallele.

Teorema 8) Un fascio di piani paralleli determina sopra due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali

Superficie conica e cono

Siano dati una circonferenza Ω ed un punto V non appartenente al piano di Ω .

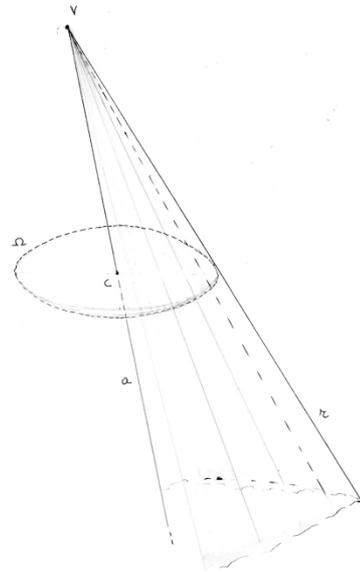
Def. 4) Si chiama *superficie conica indefinita* ad una falda (o a due falde) la superficie generata da una semiretta (o da una retta) g uscente (o passante) da V quando questa descrive tutti i punti di Ω

Il punto V è detto *vertice* della superficie conica indefinita.

La semiretta (o la retta) g è detta *generatrice* della superficie conica indefinita: ogni semiretta (o retta) uscente da V (o passante per V) e avente in comune con Ω un suo punto può fungere da generatrice della superficie conica indefinita, pertanto la semiretta (o la retta) g nel descrivere i punti della circonferenza Ω individua infinite generatrici.

La circonferenza Ω è detta *sostegno* della superficie conica indefinita.

La semiretta (o la retta) a uscente da V (o passante per V) e passante per il centro della circonferenza Ω è detta *retta fondamentale*.



Def. 5) Si chiama *cono indefinito* la parte di spazio delimitata da una superficie conica indefinita e dai punti della superficie conica indefinita

Il cono indefinito può essere ad una o a due falde se la superficie conica indefinita è a sua volta ad una o a due falde; nel caso che il cono indefinito è ad una falda , esso è detto semplicemente cono indefinito.

Def. 6) Si chiama *superficie conica di rotazione* la superficie conica indefinita generata dalla semiretta (o dalla retta) g , che nel descrivere la circonferenza Ω forma con la retta fondamentale a un angolo acuto costante.

Il cono indefinito determinato da una superficie conica indefinita di rotazione è detto *cono indefinito retto*, la retta fondamentale a è detta *asse di rotazione* (o semplicemente *asse*), l'angolo acuto formato dalla generatrice g e dalla retta fondamentale a è detto *angolo di semiapertura* del cono indefinito retto.

Def. 7) Si chiama *cono finito* (o semplicemente *cono*) la parte di spazio delimitata da un cono indefinito e da un piano π , che interseca tutte le generatrici del cono indefinito

Il cono finito può essere obliquo o retto: è retto nel caso il cono indefinito che delimita il cono finito è un cono indefinito di rotazione e la retta fondamentale \mathbf{a} è perpendicolare al piano π . Il piano π interseca il cono indefinito di rotazione in un cerchio, che costituisce la base del cono finito. Se la retta fondamentale \mathbf{a} è perpendicolare a π , allora il piede di \mathbf{a} su π coincide con il centro del cerchio base.

Def. 8) Si chiama cono retto il cono finito tale che il piede della perpendicolare condotta dal vertice cade nel centro del cerchio di base.

Dato un cono finito, sia \mathbf{b} la proiezione della retta fondamentale \mathbf{a} sul piano π . La retta \mathbf{b} interseca due generatrici \mathbf{r} ed \mathbf{s} della superficie conica rispettivamente nei punti A e B. Il triangolo AVB è detto *triangolo fondamentale*: nel caso di un cono retto tale triangolo è isoscele, altrimenti è scaleno.

La figura 1) illustra il seguente teorema:

Teorema 9) Un piano α passante per il vertice V di una superficie conica ha in comune con essa

- 1) i punti di due generatrici (fig. 1a) oppure
- 2) i punti di una generatrice (fig. 1b) oppure
- 3) il solo vertice V (fig.1c),

se l'angolo che esso forma con l'asse sia

- 1) minore oppure
- 2) congruente oppure
- 3) maggiore

dell'angolo di semiapertura della superficie conica.

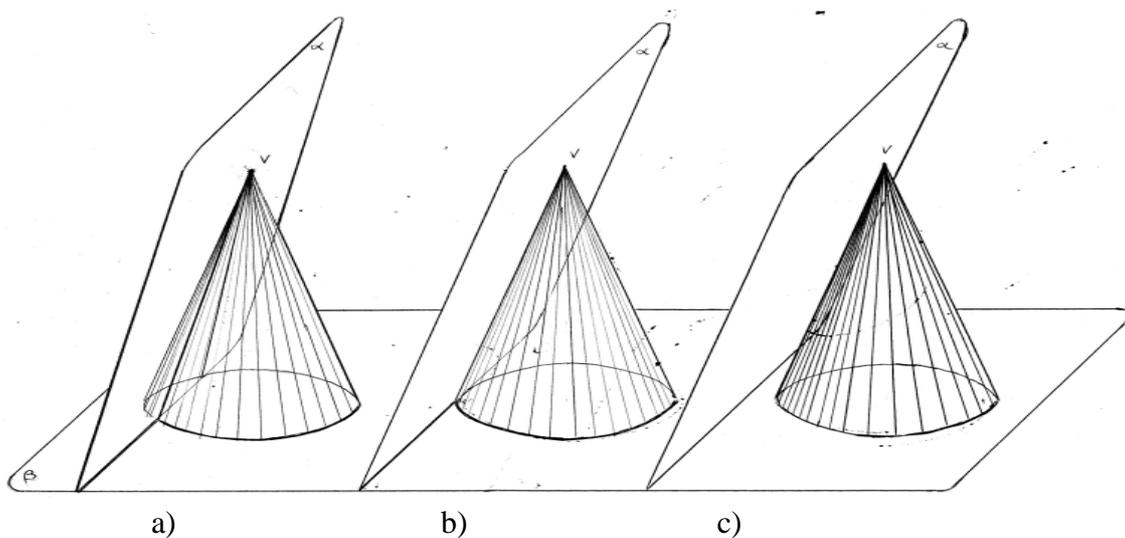


Fig. 1)

La fig.2) illustra il seguente corollario del teorema 9) :

Corollario: Un piano π parallelo ad un piano α passante per il vertice di una superficie conica a due falde interseca

- 1) tutte le generatrici eccetto due, il cui piano è parallelo ad esso, (fig.2a) oppure
- 2) tutte le generatrici eccetto una, che è parallelo ad esso, (fig.2b)oppure
- 3) tutte le generatrici (fig.2c),

se l'angolo acuto che esso forma con l'asse sia

- 1) minore oppure
- 2) congruente oppure
- 3) maggiore

dell'angolo di semiapertura della superficie conica.

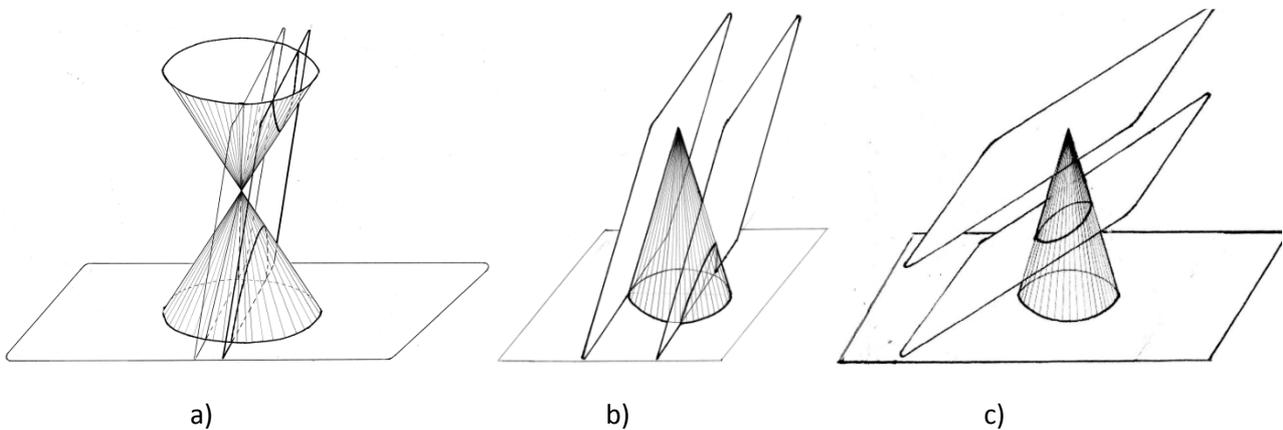


Fig. 2

Superficie sferica e sfera

Def. 9) Si chiama *superficie sferica* la figura geometrica generata da una semicirconferenza γ in una rotazione completa attorno alla retta sostegno del suo diametro.

Il centro O ed il raggio r della semicirconferenza γ sono il *centro* ed il *raggio* della superficie sferica. Poiché i punti della superficie sferica, ed essi soltanto, hanno distanza dal centro O uguale al raggio r , si può dare una nuova definizione alla superficie sferica:

Def. 10) La *superficie sferica di centro O e raggio r* è il luogo geometrico dei punti dello spazio aventi distanza da O uguale al raggio r .

I punti dello spazio, la cui distanza dal centro di una superficie sferica è minore del raggio, si dicono *interni*; quelli la cui distanza è maggiore del raggio si dicono *esterni*.

Def. 11) **La sfera** è la figura geometrica formata da una superficie sferica e dai suoi punti interni.

Teorema 10) Una retta ha in comune con una superficie sferica due punti o uno solo o nessuno se la distanza della retta dal centro della superficie è minore, eguale o maggiore del raggio.

Da questo teorema discende la seguente definizione:

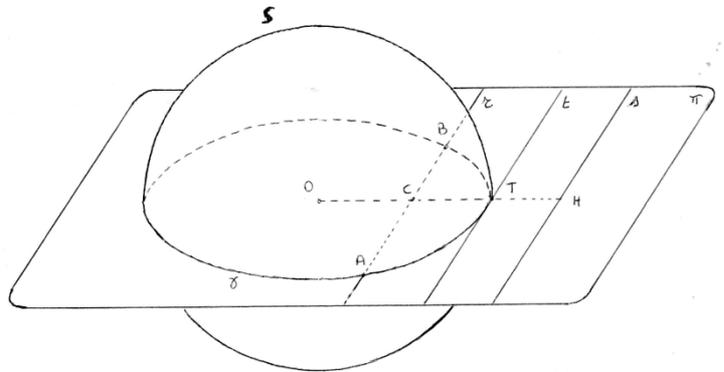


Fig. 3

Def. 12) **Una retta si dice secante, tangente od esterna** ad una superficie sferica se ha in comune con essa due, uno o nessun punto.

Nel caso che la retta è tangente il punto comune è detto punto di *tangenza* o di *contatto*. Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 11) La retta tangente ad una superficie sferica è perpendicolare al raggio della superficie che passa per il punto di contatto.

Teorema 12) Un piano ha in comune con una superficie sferica una circonferenza o un punto o nessun punto se la distanza del piano dal centro della superficie è minore, eguale o maggiore del raggio.

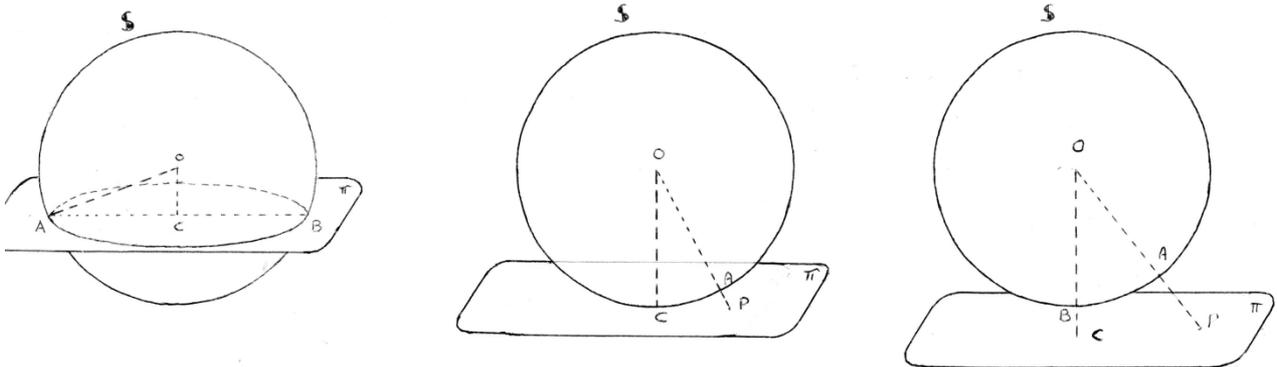


Fig. 4

Corollario: Un piano diametrale interseca la superficie sferica secondo una circonferenza massima, avente per centro e per raggio il centro e il raggio della superficie stessa.

Da questo teorema discende la seguente definizione:

Def. 12) **Un piano si dice secante, tangente od esterno** ad una superficie sferica se ha in comune con essa una circonferenza, un punto o nessun punto.

Nel caso che il piano è tangente il punto comune è detto punto di *tangenza* o di *contatto*. Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 13) Il piano tangente ad una superficie sferica è perpendicolare al raggio della superficie che passa per il punto di contatto.

Teorema 14) Segmenti di tangente condotte da un punto esterno V ad una superficie sferica sono congruenti ed il luogo geometrico dei loro punti di contatto è una circonferenza minore, il cui piano è perpendicolare alla retta diametrale passante per V .

La circonferenza dei punti di contatto è detta *circonferenza di contatto*. Da questo teorema discende la seguente definizione:

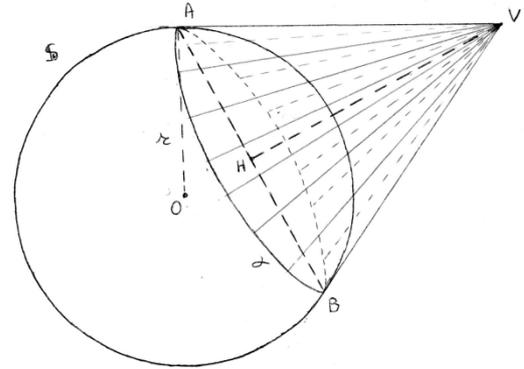


Fig. 5

Def. 13) Una *superficie conica* si dice *circoscritta* ad una superficie sferica, se le sue generatrici sono tangenti alla superficie sferica

Corollario: Segmenti di generatrici di una superficie conica circoscritta ad una sfera, compresi tra il vertice V e i punti di contatto, sono congruenti e la circonferenza di contatto è perpendicolare alla retta diametrale passante per V .

Sezione conica

Def. 14) Si chiama *sezione conica*, o semplicemente *conica*, la figura geometrica ottenuta dall'intersezione di una superficie conica indefinita a due falde con un piano π non passante per il vertice.

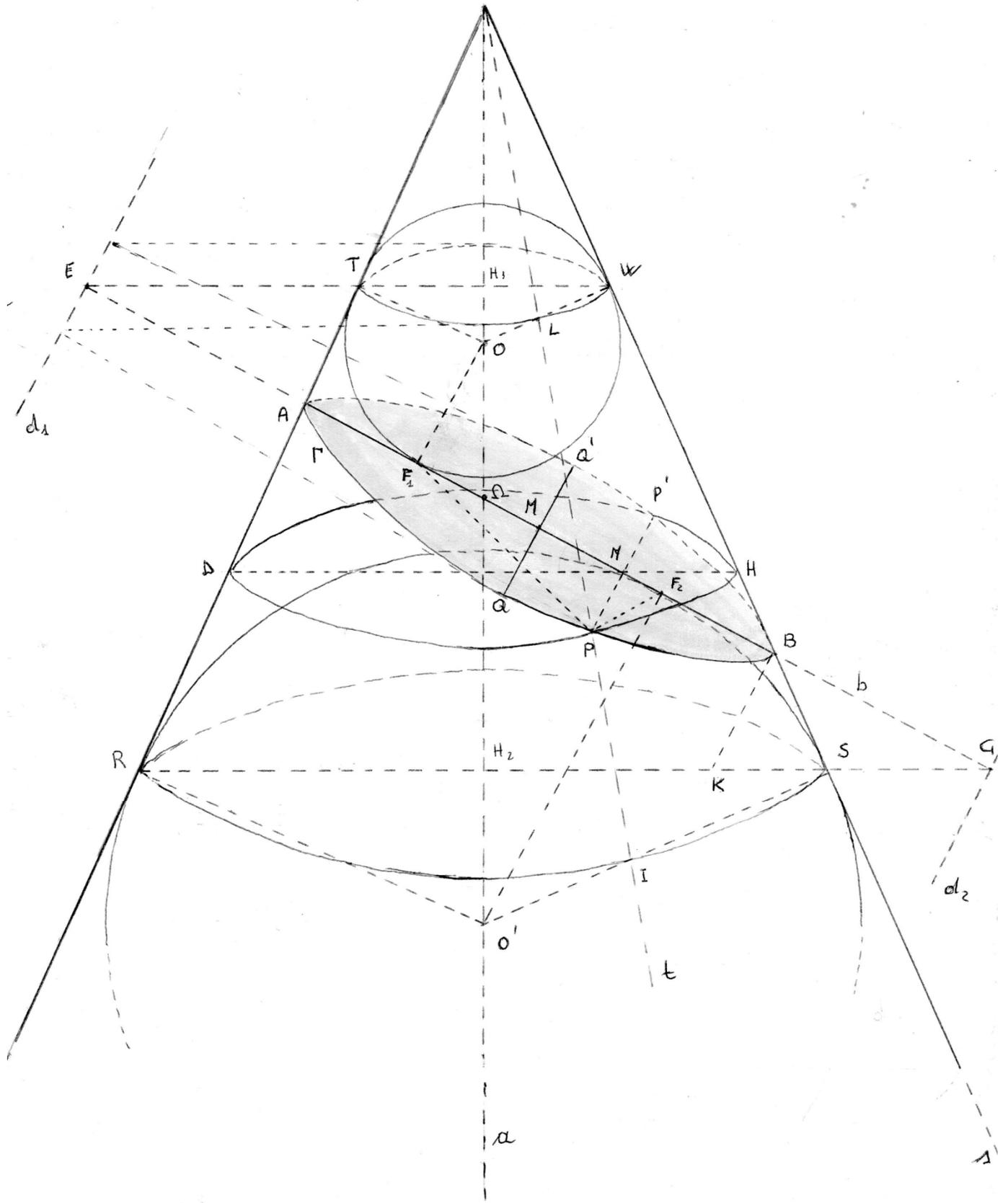
La sezione conica, essendo ottenuta dall'intersezione di una superficie conica indefinita a due falde con un piano π non passante per il vertice, come figura geometrica è una linea piana semplice chiusa; per il Postulato 1) essa divide il piano π in due regioni: i punti della regione piana interni alla superficie conica sono detti *punti interni* alla sezione conica, mentre i punti della regione piana esterni alla superficie conica sono detti *punti esterni* alla sezione conica.

Dalla Def. 14) e dal Corollario del Teorema 9) le sezioni coniche possono essere di tre tipi diversi, che da Apollonio di Perga (? 262 – 190 a.C.) in poi sono denominate *Iperbole*, *Parabola* ed *Ellisse*. Caso particolare dell'ellisse è la *Circonferenza*, come conica; perché come figura geometrica era stata studiata in modo completo dallo stesso Euclide nei suoi *Elementi*. L'iperbole a differenza delle altre coniche è costituita da due rami.

Studiamo ora una per una le diverse coniche, individuando proprietà e relazioni stereometriche e piane dei punti delle figure sezione, che scritte con formalismo algebrico moderno ci permettono di scrivere condizioni ed equazioni.

Analizziamo dunque una per una le diverse coniche.

2 ELLISSE



π
Fig. 6

Preliminari

Facendo riferimento alla fig. 6) , siano dati una superficie conica indefinita di rotazione, con vertice in V e asse a , un piano π , che non passa per il vertice V e che forma con l'asse a un angolo maggiore dell'angolo di semiapertura della superficie conica. Tale piano, per il corollario del teorema 9) , interseca tutte le generatrici della superficie conica, i cui punti di intersezione costituiscono la figura piana sezione conica Γ : detta *ellisse*.

Si consideri la retta b proiezione dell'asse a sul piano π , tale retta interseca due generatrici r ed s , simmetriche rispetto ad a , rispettivamente nei punti A e B con $VA < VB$: infatti VA sottende l'angolo acuto tra retta e piano, mentre VB sottende l'angolo supplementare di questo che risulta essere ottuso.

Il piano π taglia la superficie conica in due parti: l'insieme dei punti dello spazio della superficie conica, dei suoi punti interni e quelli del piano, determinano un cono obliquo e un tronco di cono indefinito. Relativamente al cono obliquo è possibile inscrivere ed exinscrivere due sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 di centri rispettivamente O ed O' , che toccano internamente la superficie conica nelle circonferenze λ_1 e λ_2 di diametri rispettivamente TW ed RS (con T ed R appartenenti alla generatrice r e con W ed S appartenenti alla generatrice s) e di centri rispettivamente H_1 ed H_2 (con O, O', H_1 ed H_2 appartenenti all'asse a del cono). Le sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 sono pure tangenti al piano π nei suoi punti F_1 ed F_2 , che appartengono alla retta proiezione b dell'asse a su π e pertanto sono interni al segmento AB .

Teorema 15: Dimostrare che i punti di λ_1 e λ_2 , appartenenti alla stessa generatrice , sono equidistanti e le circonferenze di contatto λ_1 e λ_2 appartengono a piani paralleli.

Dimostrazione:

Consideriamo le generatrici r, s e v condotte da V e tangenti alle due sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 rispettivamente nei punti T ed R, W ed S, L ed I . Per il Teorema 14), i punti delle circonferenze λ_1 e λ_2 sono punti di tangenza alle sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 condotte dal vertice V del cono pertanto detti punti rispettivamente di λ_1 e λ_2 risultano equidistanti dal vertice: cioè $VT = VW$ e $VR = VS$, così pure $VT = VL$ e $VR = VI$. Applicando il Teorema: “ Somma o differenza di segmenti congruenti sono congruenti “ , possiamo affermare che: $VR - VT = VS - VW$ e

$VR - VT = VI - VL$. Ma $VR - VT \equiv RT$, $VS - VW \equiv WS$ e $VI - VL \equiv LI$, quindi $RT = WS$; così pure $RT = LI$; e, per la proprietà transitiva della congruenza possiamo scrivere che

$$RT = WS = LI.$$

Sempre per il teorema 14) i piani delle circonferenze di contatto λ_1 e λ_2 sono perpendicolari alla rette diametrali delle due sfere, che coincidono entrambe con l'asse a del cono, pertanto per il Teo-rema 6) i due piani sostegno di λ_1 e λ_2 sono paralleli.

C.V.D

Teorema 16: Dimostrare che il segmento **AB** è congruente ai segmenti di estremi i punti di λ_1 e λ_2 , appartenenti alla stessa generatrice.

Dimostrazione:

Consideriamo i due segmenti AB e WS, i cui estremi sono rispettivamente A e B, W e S: con A e B esterni alle due

sfere \mathcal{C}' e \mathcal{C}'' , mentre W appartiene a \mathcal{C}' e S appartiene a \mathcal{C}'' .

Consideriamo il punto A, esterno alla sfera \mathcal{C}'' , AR ed AF₂ che sono segmenti di tangente: b ed r, condotti dallo stesso punto A, per il Teorema 14 risultano congruenti: AR = AF₂

Consideriamo il punto A, esterno alla sfera \mathcal{C}' , AT ed AF₁ che sono segmenti di tangente: r ed b, condotti dallo stesso punto A, per il Teorema 14) risultano congruenti: AT = AF₁.

Per il Teorema “Somme o differenze di segmenti congruenti sono congruenti” si deduce che AT + AR = AF₁ + AF₂; ma AT + AR = TR, quindi AF₁ + AF₂ = TR per la proprietà transitiva della congruenza.

Consideriamo il punto B, esterno alla sfera \mathcal{C}'' , e consideriamo BS ed BF₂ che sono segmenti di tangente: s ed b, condotti dallo stesso punto B, per il teorema 14) risultano congruenti: BS = BF₂

Consideriamo il punto B, esterno alla sfera \mathcal{C}' , e consideriamo BW ed BF₁ che sono segmenti di tangente: s ed b, condotti dallo stesso punto B, per il Teorema 14) risultano congruenti: BW = BF₁.

Per il Teorema “Somme o differenze di segmenti congruenti sono congruenti” si deduce che BS + BW = BF₂ + BF₁; ma BS + BW = WS, quindi BF₁ + BF₂ = WS per la proprietà transitiva della congruenza.

La tesi del Teorema 15) afferma che TR = WS, quindi per la proprietà transitiva della congruenza si deduce che

$$1) \quad AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2$$

I segmenti AF₂ ed BF₁ si possono decomporre in somma di segmenti: cioè

$$AF_2 = AF_1 + F_1F_2 \quad \text{e} \quad BF_1 = BF_2 + F_1F_2$$

Sostituendo in 1) dette somme, si ha:

$$AF_1 + AF_1 + F_1F_2 = BF_2 + F_1F_2 + BF_2$$

Sommando segmenti congruenti ed sottraendo ad ambo i termini il segmento F₁F₂, si ottiene:

$$2 AF_1 = 2 BF_2$$

Dal teorema “Se due segmenti sono congruenti, allora sono congruenti le loro metà”, discende che AF₁ = BF₂.

Andando a sostituire in 1) la congruenza si trasforma in un'identità: infatti

$$BF_2 + AF_2 = BF_1 + AF_1 = AB$$

Ma AF₁ + AF₂ = TR, che è lo stesso BF₂ + AF₂ = TR; per la proprietà transitiva della congruenza

si ha che AB = TR, che a sua volta è congruente a WS e LI. Di qui la tesi che AB è congruente alla distanza dei punti di λ_1 e λ_2 , appartenenti alla stessa generatrice.

C.V.D.

Corollario: I punti di tangenza F₁ ed F₂ delle due sfere \mathcal{C}' e \mathcal{C}'' col piano π hanno la stessa distanza rispettivamente da A e da B: cioè AF₁ = BF₂

Teorema 17) Se M è punto medio di AB allora M è punto medio di F₁F₂.

Dimostrazione:

Nel corso della dimostrazione del teorema 16) si è provato che AF₁ = BF₂, per ipotesi M è punto medio di AB: cioè AM = MB. Per il Teorema “Somme o differenze di segmenti congruenti sono congruenti” possiamo scrivere che

AM - AF₁ = MB - BF₂: cioè F₁M = MF₂ pertanto M è punto medio di F₁F₂.

C.V.D.

Prima definizione di Ellisse secondo i canoni di Apollonio

Sia M il punto medio di AB e si tracci sul piano π la retta perpendicolare ad AB, tale retta interseca la sezione conica Γ nei punti Q e Q'.

Sia P un generico punto della sezione conica Γ e tracciamo da P la retta perpendicolare sul piano π alla retta b, tale retta interseca b in N, che costituisce il piede della perpendicolare condotta da P a b, e la sezione conica Γ nel punto P', simmetrico di P rispetto alla retta b. Al variare di P su Γ , variano i punti N e P': mentre restano invariate le posizioni di tutti gli altri punti sia della superficie conica sia del piano π . Pertanto stabiliti

- Il cono circolare retto con il suo angolo di semiapertura
- Il piano π di intersezione, che forma con l'asse a del cono un determinato angolo acuto
- La retta b proiezione dell'asse a sul piano π e le intersezioni di b con due generatrici: A e B
- Le sfere inscritte ed exinscritte al cono obliquo finito intercettato dalla superficie conica indefinita e dal piano π con le relative circonferenze di tangenza.

Possiamo affermare che i segmenti con relative lunghezze assolute AB, QQ', F_1F_2 , sono delle costanti: cioè non dipendono dalla scelta del punto generico P della sezione conica Γ : ciò permette con scrittura moderna di porre $AB = 2a$, $QQ' = 2b$ e $F_1F_2 = 2c$, dove a, b e c sono dei parametri: cioè grandezze assegnate ma non note.

Facendo sempre riferimento alla figura 3), tracciamo dal generico punto P la circonferenza λ_3 , i cui punti giacciono sulla superficie conica. Tale circonferenza è costituita da punti equidistanti dal vertice V del cono e pertanto come per λ_1 e per λ_2 il suo piano è parallelo a quello di λ_1 e λ_2 . Sia DH il suo diametro con D appartenente alla generatrice r ed H appartenente alla generatrice s. Il piano sostegno di λ_3 ha in comune con il piano π il punto P e per il teorema "Se due piani hanno in comune un punto hanno in comune una retta passante per quel punto" la retta sostegno di PP' è la retta intersezione dei due piani. Pertanto N appartiene al diametro di λ_3 e PP' è ad esso perpendicolare.

Consideriamo il triangolo DPH. Essendo inscritto in una semicirconferenza esso è retto in P. Poiché PN è perpendicolare a DH in N suo elemento, DN è l'altezza di DPH relativa all'ipotenusa DH. A questo triangolo applichiamo il II Teorema di Euclide e pertanto possiamo scrivere:

$$2) \quad PN^2 = DN \times NH$$

Sia G il punto di intersezione di b con la retta sostegno del diametro RS di λ_2 .

Si considerino i due triangoli DAN e RAG. Questi hanno

$$\hat{D}AN = \hat{R}AG \quad \text{perché in comune}$$

$$ADN = ARG \quad \text{perché corrispondenti di } DN \parallel RS \text{ tagliate dalla trasversale AR}$$

$$AND = AGR \quad \text{perché corrispondenti di } DN \parallel RS \text{ tagliate dalla trasversale AG}$$

Avendo tutti gli angoli congruenti i due triangoli DAN e RAG risultano simili per il I° criterio di similitudine dei triangoli e pertanto hanno i lati in proporzione:

$$AN : AG = DN : RG \quad \text{da cui} \quad DN = \frac{AN \cdot RG}{AG}$$

Si considerino i due triangoli NHB e BSG. Questi hanno

$$NBH = GBS \quad \text{perché opposti al vertice}$$

$$BNH = BGS \quad \text{perché alterni interni di } DN \parallel RS \text{ tagliate dalla trasversale b}$$

$$NHB = GSB \quad \text{perché alterni interni di } DN \parallel RS \text{ tagliate dalla trasversale s}$$

Avendo tutti gli angoli congruenti i due triangoli NHB e BSG risultano simili per il I° criterio di similitudine dei triangoli e pertanto hanno i lati in proporzione:

$$NH : SG = NB : BG \quad \text{da cui} \quad NH = \frac{NB \cdot SG}{BG}$$

Andando a sostituire in 2) DN ed NH, otteniamo la seguente relazione:

$$3) \quad PN^2 = AN \cdot NB \cdot \frac{RG \cdot SG}{AG \cdot BG}$$

In questa relazione al variare di P varia come si è detto N e di conseguenza AN e NB, mentre RG, SG, AG e BG non dipendono da P. Pertanto il rapporto $\frac{RG \cdot SG}{AG \cdot BG}$ risulta una costante. Il punto Q è un particolare punto di Γ , quindi si trova nelle stesse condizioni di P e perciò soddisfa alla stessa relazione 3), tenendo conto che il piede della perpendicolare di Q su \mathbf{b} è il punto M si ha

$$QM^2 = AM \cdot MB \cdot \frac{RG \cdot SG}{AG \cdot BG}$$

Ma $AM = MB$, essendo M punto medio di AB, pertanto la relazione diventa:

$$QM^2 = AM^2 \cdot \frac{RG \cdot SG}{AG \cdot BG}$$

Dividendo ambo i termini per AM^2 , otteniamo

$$\frac{RG \cdot SG}{AG \cdot BG} = \frac{QM^2}{AM^2}$$

Sostituendo nella relazione 3) e considerando che $NB = AB - AN$, si ha

$$4) \quad PN^2 = AN \cdot (AB - AN) \cdot \frac{QM^2}{AM^2}$$

Posto $AB = 2AM$, si ha

$$PN^2 = AN \cdot (2AM - AN) \cdot \frac{QM^2}{AM^2}$$

Moltiplicando e semplificando, si ha

$$PN^2 = \frac{2QM^2}{AM} \cdot AN - \frac{QM^2}{AM^2} \cdot AN^2$$

Che è la **relazione trovata da Apollonio**.

Considerato che all'inizio si è posto con scrittura parametrica che $QQ' = 2b$, quindi $QM = b$; e, $AB = 2a$, quindi $AM = a$, la relazione di Apollonio diventa:

$$PN^2 = \frac{2b^2}{a} \cdot AN - \frac{b^2}{a^2} \cdot AN^2$$

Posto $l = \frac{2b^2}{a}$, la relazione diviene

$$PN^2 = l \cdot AN - \frac{b^2}{a^2} \cdot AN^2$$

Questa relazione afferma:

“ Assegnato un segmento di misura l trovare il rettangolo che diminuito di un quadrato sia equivalente ad un secondo quadrato “

Da questa affermazione scaturisce il nome attribuito a questa sezione conica *Ellisse*, che in greco significa *mancante*: cioè il quadrato è equivalente al rettangolo di lato assegnato l *mancante* di un quadrato . Questa parola era già nota ai matematici greci che l'avevano usata in un altro contesto nella risoluzione geometrica di equazioni di secondo grado: $x^2 + b^2 = ax$. (vedere Appendice)

Def. 15) Si chiami *ellisse* la sezione conica Γ i cui punti P soddisfano la relazione $PN^2 = l \cdot AN - \frac{b^2}{a^2} \cdot AN^2$, dove N è il piede della perpendicolare condotto da P alla retta \mathbf{b} , $l = \frac{2b^2}{a}$, con a e b parametri della conica.

Ricerca dell'equazione dell'ellisse a noi oggi nota a partire dalla relazione di Apollonio

Vogliamo ora con simbologia dell'algebra moderna trovare l'equazione dell'ellisse oggi nota in qualsiasi corso di scuola secondaria di 2° grado. A tal proposito sostituiamo incognite e parametri opportuni :

$$PN = y, \quad MN = x, \quad AN = a + x, \quad AB - AN = a - x, \quad \frac{QM^2}{AM^2} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{RG \cdot SG}{AG \cdot BG}$$

Sostituendo nella relazione 4), si ha

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a + x)(a - x)$$

Applicando regole algebriche, si ha:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \quad ; \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad ; \quad y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2 \quad ;$$

Dividendo ambo i termini per b^2 e ordinando, si ha l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Seconda definizione di Ellisse come luogo geometrico: somma di distanze

Facendo riferimento alla fig. 5) e alle considerazioni fatte nella “ Relazione di Apollonio “, si è dimostrato che PF_1 è congruente a PL in quanto segmenti di tangenza condotti da P alla sfera \mathcal{E}' così pure sono congruenti i segmenti PF_2 e PI :

$$PF_1 = PL \quad \text{e} \quad PF_2 = PI$$

Dal teorema “ Somme o differenze di segmenti congruenti sono congruenti “ si può dedurre che
 $PF_1 + PF_2 = PL + PI$

Essendo $PL + PI = LI$, allora dalla proprietà transitiva della congruenza discende

$$PF_1 + PF_2 = LI$$

Col teorema 16) si è dimostrato che $LI = AB$, pertanto sempre per la proprietà transitiva della congruenza si può affermare che

$$5) \quad PF_1 + PF_2 = AB$$

Questa relazione geometrica stabilisce che, comunque sia P elemento della sezione conica, la somma dei segmenti aventi per estremi il punto P e rispettivamente i punti F_1 ed F_2 è uguale al segmento AB. Poiché i punti P appartengono non solo alla sezione conica Γ ma anche al piano π sostegno di Γ , questa relazione stabilisce una specifica proprietà dei punti P del piano π . Facendo riferimento alla definizione euclidea di *luogo geometrico piano*: cioè l'insieme dei punti del piano che godono di una certa proprietà, si può affermare che la sezione conica che si sta trattando è un luogo geometrico la cui proprietà è quella espressa dalla relazione 5).

Def. 16) Si chiama *Ellisse* il luogo dei punti P del piano per i quali è costante (AB) la somma delle distanze da due punti fissi (F_1 ed F_2).

Ricerca della relazione che lega i segmenti QM, AM, MF₁.

Il punto Q appartiene alla sezione conica Γ come P quindi è soggetto alla relazione 5): cioè

$$QF_1 + QF_2 = AB$$

Si consideri il triangolo F_1QF_2 , esso è isoscele sulla base F_1F_2 , essendo QM altezza e mediana. I lati di detto triangolo sono congruenti: $QF_1 = QF_2$; di conseguenza, sommando le quantità congruenti nell'ultima relazione, si ottiene $2QF_1 = AB$ e ancora QF_1 risulta la metà di AB. Essendo M punto medio di AB, AM è la metà di AB; pertanto sempre per la proprietà transitiva della congruenza si ha che $QF_1 = QF_2 = AM$. Si consideri il triangolo F_1MQ , retto in M; e, si applichi il Teorema di Pitagora: $MF_1^2 + MQ^2 = QF_1^2$. In questa relazione ricavando MF_1 , si ha la relazione che lega i segmenti QM, QF_1 ed MF_1 : $MF_1^2 = QF_1^2 - MQ^2$, che è lo stesso sostituendo QF_1 con AM ,

$$MF_1^2 = AM^2 - MQ^2$$

Poiché AM e MQ sono delle costanti non dipendendo dalla variazione di P, anche MF_1 risulta costante. Assegnando ad MF_1 il valore parametrico c e ricordando i valori parametrici di AM e MQ, la relazione trovata si può scrivere con scrittura moderna:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Ricerca dell'equazione dell'ellisse a noi oggi nota a partire dalla prima relazione di luogo

Sfruttando la definizione di luogo geometrico e sostituendo nella relazione 5) variabili e parametri: cioè $AB = 2a$, $MQ = b$, $MF_1 = MF_2 = c$, $MN = x$ e $PN = y$; e, applicando ai triangoli rettangoli PNF_1 e PNF_2 il Teorema di Pitagora e ricavando PF_1 e PF_2 , la relazione può essere scritta in forma di equazione irrazionale:

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$$

Dove $PF_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$ e $PF_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$: relativamente alla figura a cui si fa riferimento.

Operando algebricamente dapprima razionalizzando l'espressione e poi calcolando si ha:

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 + c^2 - 2cx + x^2 + y^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$ isolando b^2 , si ha $b^2 = a^2 - c^2$. Sostituendo tale espressione nell'equazione sopra scritta si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Che risulta formalmente uguale a quella trovata precedentemente per altra via con l'aggiunta della condizione che lega i parametri a, b e c: dette condizioni dell'ellisse.

Terza definizione di Ellisse come luogo geometrico: rapporto di distanze

Ora vediamo un altro modo di individuare la relazione che lega i punti P della sezione conica in oggetto.

Nelle "considerazioni preliminari" all'ellisse si è dimostrato che i piani sostegno di λ_1 , di λ_2 e di λ_3 sono paralleli tra loro e perpendicolare all'asse del cono indefinito. Il piano individuato dalle generatrici r ed s interseca detti piani rispettivamente nelle rette sostegno di (T, W), di (R, S) e (D, H) ed il piano π nella retta sostegno di (A, B). Le rette passanti per T e W, per R ed S e per D e H sono parallele per il teorema 7). La retta sostegno dei punti A e B è obliqua rispetto a queste rette e pertanto le interseca singolarmente in uno ed un solo punto : precisamente in E la retta passante per T e W, in G la retta passante per R e S, in N la retta passante per D ed H. Il piano π ed il piano sostegno di λ_3 si intersecano nella retta sostegno di Q e Q' passante per N: punto comune ai

due piani; tale retta intersezione per costruzione è perpendicolare alla retta sostegno di A e B, pertanto la retta intersezione d_1 del piano π con il piano sostegno di λ_1 passante per E è perpendicolare alla retta per A e B, così pure la retta intersezione d_2 del piano π col piano sostegno di λ_2 passante per G è perpendicolare alla retta passante per A e B.

Teorema 18): Dimostrare che BG è congruente ad AE.

Dimostrazione:

Dopo aver tracciato da B la parallela alla generatrice r, che interseca in K il segmento RG, consideriamo i triangoli BKS e RVS. Questi hanno

VRS = BKS perché angoli corrispondenti di $RS \parallel BG$ tagliate dalla trasversale g
BSK = VSR perché coincidenti

Per il teorema “ due triangoli aventi due angoli congruenti sono simili “ i due triangoli BKS e RVS sono simili. Poiché il triangolo RVS è isoscele, essendo R ed S equidistanti da V, allora anche BKS è isoscele e quindi $BK = BS$. Considerato che precedentemente abbiamo dimostrato che $BS = BF_2$ e che $BF_2 = AF_1$ e che $AF_1 = AT$, per la proprietà transitiva della congruenza $BK = AT$. Si considerino i due triangoli TAE e BKG, questi hanno

AT = BK per averlo dimostrato
TEA = BGK perché alterni interni di $EW \parallel RG$ tagliate dalla trasversale passante per A e B
TAE = KBG perché alterni esterni di $r \parallel BK$ tagliate dalla trasversale passante per A e B

Pertanto per il corollario “ due triangoli aventi ordinatamente un lato e due angoli congruenti sono congruenti “ i due triangoli TAE e BKG sono congruenti, in particolare $BG = AE$

C.V.D.

Si è dimostrato che $AF_1 = BF_2$ e per il teorema “ somme di segmenti congruenti sono congruenti “ si può affermare che $AF_1 + AE = BF_2 + BG$. I punti A, B, E, G, F_1 ed F_2 sono allineati in quanto appartenenti alla retta passante per A e B, quindi $AF_1 + AE = F_1E$ e $BF_2 + BG = F_2G$. Per la proprietà transitiva della congruenza

$$F_1E = F_2G$$

Ora F_1E ed F_2G appartengono alla retta passante per AB che è perpendicolare alle rette d_1 e d_2 , rispettivamente in E e G e quindi F_1E ed F_2G costituiscono le distanze di F_1 e di F_2 rispettivamente da d_1 e da d_2 , che si possono anche scrivere $d(F_1, d_1)$ e $d(F_2, d_2)$. Poiché E, G, F_1 ed F_2 sono punti fissi che non variano al variare di P sulla conica, i segmenti F_1E e F_2G sono delle costanti. Si può affermare con scrittura parametrica che $d(F_1, d_1) = d(F_2, d_2) = p = \text{cost.}$

Confrontiamo ora i segmenti PF_1 e $NE = NF_1 + F_1E$ e i segmenti PF_2 e $NG = NF_2 + F_2G$.

- *Confronto tra PF_1 e NE*

Consideriamo i segmenti di tangente PF_1 e PL condotti dallo stesso punto P alla sfera \mathcal{E}' essi sono congruenti, così pure sono congruenti i segmenti PL e TD per averlo dimostrato e quindi per la proprietà transitiva della congruenza $PF_1 = TD$; il segmento TD è dato dalla somma dei segmenti

TA e AD, con $TA=AF_1$ in segmenti di tangenza condotti dallo stesso punto A alla sfera \mathcal{E}' . Si consideri l'angolo VHD, esso è esterno al triangolo NHB. Per il teorema dell'angolo esterno di un triangolo $VHD > HNB$. Ma HNB è opposto al vertice dell'angolo AND e quindi $HNB = AND$. L'angolo $VHD = ADN$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele, pertanto $ADN > AND$. Si consideri il triangolo ADN e si applichi il teorema sulla disuguaglianza triangolare "in un triangolo ad angolo maggiore corrisponde lato maggiore": cioè $AN > AD$. Poiché i triangoli TAE e DAN hanno gli angoli congruenti, per analogia si può affermare che $EA > TA$. Sommando ambo i termini delle due disuguaglianze equiverse si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso: $AN + AE > DA + AT$, che è lo stesso affermare $NE > DT$, ma $DT = PF_1$. Concludendo si può scrivere che

$$NE > PF_1$$

NE è il segmento di perpendicolare condotto da N alla retta d_1 , quindi esso costituisce la distanza di N da d_1 . Se si traccia la perpendicolare da P a d_1 , tale distanza è uguale ad NE, in quanto $PN \parallel d_1$ PN è perpendicolare per costruzione alla retta che passa per AB. Concludendo si può scrivere

$$PF_1 < d(P, d_1)$$

- *Confronto tra PF_2 e NG*

Consideriamo i segmenti di tangente PF_2 e PI condotti dallo stesso punto P alla sfera \mathcal{E}'' essi sono congruenti, così pure sono congruenti i segmenti PI e HS per averlo dimostrato e quindi per la proprietà transitiva della congruenza $PF_2 = HS$; il segmento HS è dato dalla somma dei segmenti HB e BS, con $BS=BF_2$ in quanto segmenti di tangenza condotti dallo stesso punto B alla sfera \mathcal{E}'' . Si considerino i triangoli NHB e BSG sono simili per avere tutti gli angoli congruenti e ottusangoli rispettivamente in H e in S. Si può applicare il teorema della disuguaglianza triangolare e quindi $NB > HB$ e $BG > BS$. Sommando ambo i termini delle due disuguaglianze equiverse si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso: $NB + BG > HB + BS$, che è lo stesso affermare $NG > HS$, ma $HS=PF_2$. Concludendo si può scrivere

$$NG > PF_2$$

NG è il segmento di perpendicolare condotto da N alla retta d_2 , quindi esso costituisce la distanza di N da d_2 . Se si traccia il segmento di perpendicolare da P a d_2 , tale segmento (che ne costituisce la distanza) è uguale ad NG, in quanto $PN \parallel d_1$ e PN è perpendicolare per costruzione alla retta che passa per AB. Concludendo si può scrivere

$$PF_2 < d(P, d_2)$$

Da questi due confronti possiamo affermare indifferentemente che

$$PF < d(P, d)$$

Dividendo ambo i termini di quest'ultima disuguaglianza per $d(P, d)$, si ottiene

$$\frac{PF}{d(P, d)} < 1$$

Questa relazione ci permette di introdurre una nuova proprietà dei punti P del piano π appartenenti alla sezione conica Γ : cioè tale proprietà definisce un nuovo luogo geometrico piano. La sezione conica Γ è il luogo geometrico dei punti del piano π che soddisfano tale relazione: cioè il rapporto tra le distanze di un punto della conica da un punto fisso e e da una retta fissa è minore di 1. Se tale rapporto si pone uguale ad e (con $e < 1$), possiamo scrivere la relazione

$$6) \quad \frac{PF}{d(P,d)} = e$$

Def. 19) Si chiama *Ellisse* il luogo geometrico dei punti del piano π per i quali risulti costante (e) il rapporto delle distanze da un punto fisso (F) e da una retta fissa (d)

Si trasformi anche in questo caso l'equazione del luogo, scegliendo opportuni parametri ed incognite. Si ponga:

$$NF = x, \quad PN = y, \quad d(F, d) = p \quad \Rightarrow \quad PF = \sqrt{x^2 + y^2} \quad e \quad d(P, d) = p + x.$$

Sostituendo nella relazione 6) si ha:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{p + x} = e$$

Operando algebricamente:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e (p + x)$$

$$x^2 + y^2 = e^2 (p + x)^2$$

$$x^2 + y^2 = e^2 p^2 + 2e^2 px + e^2 x^2$$

$$(1 - e^2) x^2 + y^2 - 2e^2 px - e^2 p^2 = 0$$

Dividendo ambo i termini per $1 - e^2$, si ha

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} - \frac{2e^2 px}{1 - e^2} - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = 0$$

Ordinando , sommando e sottraendo $\frac{p^2 e^4}{(1 - e^2)^2}$, si ha

$$x^2 - \frac{2e^2 px}{1 - e^2} + \frac{p^2 e^4}{(1 - e^2)^2} - \frac{p^2 e^4}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{pe^2}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} - \frac{p^2 e^4}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{pe^2}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}$$

Dividendo ambo i termini per $\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}$, si ha $\frac{\left(x - \frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\frac{y^2}{1-e^2}}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = 1$

Semplificando, si ha

$$\frac{\left(x - \frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{1-e^2}} = 1$$

Posto

$$\left(x - \frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2 = x^2, \quad \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} = a^2, \quad \frac{p^2 e^2}{1-e^2} = b^2$$

Si ha l'equazione cercata:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'equazione scritta risulta ancora l'equazione trovata con gli altri metodi geometrici e quindi si può definire ancora l'equazione dell'ellisse.

Determiniamo il significato geometrico di e.

Si consideri il rapporto $\frac{MQ^2}{MA^2} = \frac{b^2}{a^2}$ e si sostituisca in esso i valori $\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} = a^2$, $\frac{p^2 e^2}{1-e^2} = b^2$

$$\frac{MQ^2}{MA^2} = \frac{\frac{p^2 e^2}{1-e^2}}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = 1 - e^2 \text{ da cui } e^2 = \frac{MA^2 - MQ^2}{MA^2}, \text{ che è lo stesso } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} : \text{cioè}$$

$$e = \frac{c}{a} \quad : \quad e = \frac{MF}{MA}$$

Tale relazione permette di affermare che e è il rapporto costante fra la semidistanza focale e la semidistanza di AB

Determiniamo il valore di p in funzione di a, b, c ed il suo significato geometrico:

Si considerino le relazioni $e = \frac{c}{a}$ e $\frac{p^2 e^2}{1-e^2} = b^2$, sostituendo in quest'ultima la prima

relazione si ha $b^2 = \frac{p^2 \frac{c^2}{a^2}}{1 - \frac{c^2}{a^2}}$; calcolando e semplificando, si ha $b^2 = \frac{p^2 c^2}{a^2 - c^2}$. Sostituendo

in quest'ultima $b^2 = a^2 - c^2$, si ha $b^2 = \frac{p^2 c^2}{b^2}$. Infine $p = \frac{b^2}{c}$: cioè $p = \frac{MQ^2}{MF}$

pertanto $d(F, d) = \frac{MQ^2}{MF}$.

Conclusioni:

L'impostazione stereometrica della sezione conica *ellisse* permette di esprimere alcune considerazioni:

- La superficie conica indefinita (o il cono indefinito) ed il piano sezione, che interseca tutte le generatrici della superficie conica, devono essere prioritariamente assegnati e non sono soggette a modifiche durante la trattazione
Se uno di questi o entrambi variano, purchè l'angolo fra asse del cono e piano sezione rimane maggiore dell'angolo di semiapertura del cono, non cambia la natura della sezione conica, ma cambiano le lunghezze dei segmenti costanti: cioè i valori dei parametri; e, di conseguenza cambiano i loro rapporti, ottenendo così diversi tipi di ellisse.
- Le proprietà dei punti della sezione conica sono emerse da considerazioni geometriche: infatti attraverso una serie di assiomi, di teoremi, di corollari e di definizioni ora di geometria piana ora di geometria solida si è riusciti a individuare e dimostrare relazione fra segmenti opportuni che determinano univocamente le proprietà di detti punti.
- Nelle relazioni si fa riferimento a grandezze variabili e a grandezze costanti o parametriche sempre di tipo assoluto: per i matematici greci le grandezze sono sempre segmenti o aree o rapporti di questi. Relativamente alla figura proposta durante la trattazione
 - 1) nella relazione di Apollonio sono
 - variabili i segmenti AN e PN
 - costanti i segmenti RG, SG, AG, BG e AB
 - 2) nella definizione di ellisse come somma di distanze sono
 - variabili i segmenti MN e PN
 - costanti i segmenti AB, MF e MQ
 - 3) nella definizione di ellisse come rapporto di distanze sono
 - variabili i segmenti NF e PN
 - costanti i segmenti $F_1E = F_2G = d(F, d)$, MQ, MF
- La trasformazione delle relazioni geometriche nel linguaggio moderno di tipo algebrico con relativo bagaglio operativo è servito semplicemente a rendere più snello il calcolo e più chiari e semplici i risultati raggiunti. Tale trasformazione ha permesso di formalizzare in termini di equazioni o identità dette relazioni geometriche e di constatare che tutte e tre ricerche conducono allo stesso risultato.

Nella Storia della Matematica alcuni punti , alcune rette, alcuni segmenti incontrati nella trattazione hanno assunto nomi particolari in funzione del ruolo applicativo che i matematici hanno ritenuto attribuire ed usare nei loro scritti: così

- Il punto F è detto *fuoco*: di conseguenza l'ellisse ha due fuochi F_1 ed F_2
- Il punto M è detto *centro*.
- I punti A,B,Q,Q' sono detti *vertici*
- La retta d è detta *direttrice*: di conseguenza l'ellisse ha due direttrici d_1 e d_2
- Il segmento AB è detto *asse principale o maggiore*
- Il segmento QQ' è detto *asse secondario o minore*
- Il rapporto $e = \frac{MF}{MA}$ è detto *eccentricità*.

Circonfenza

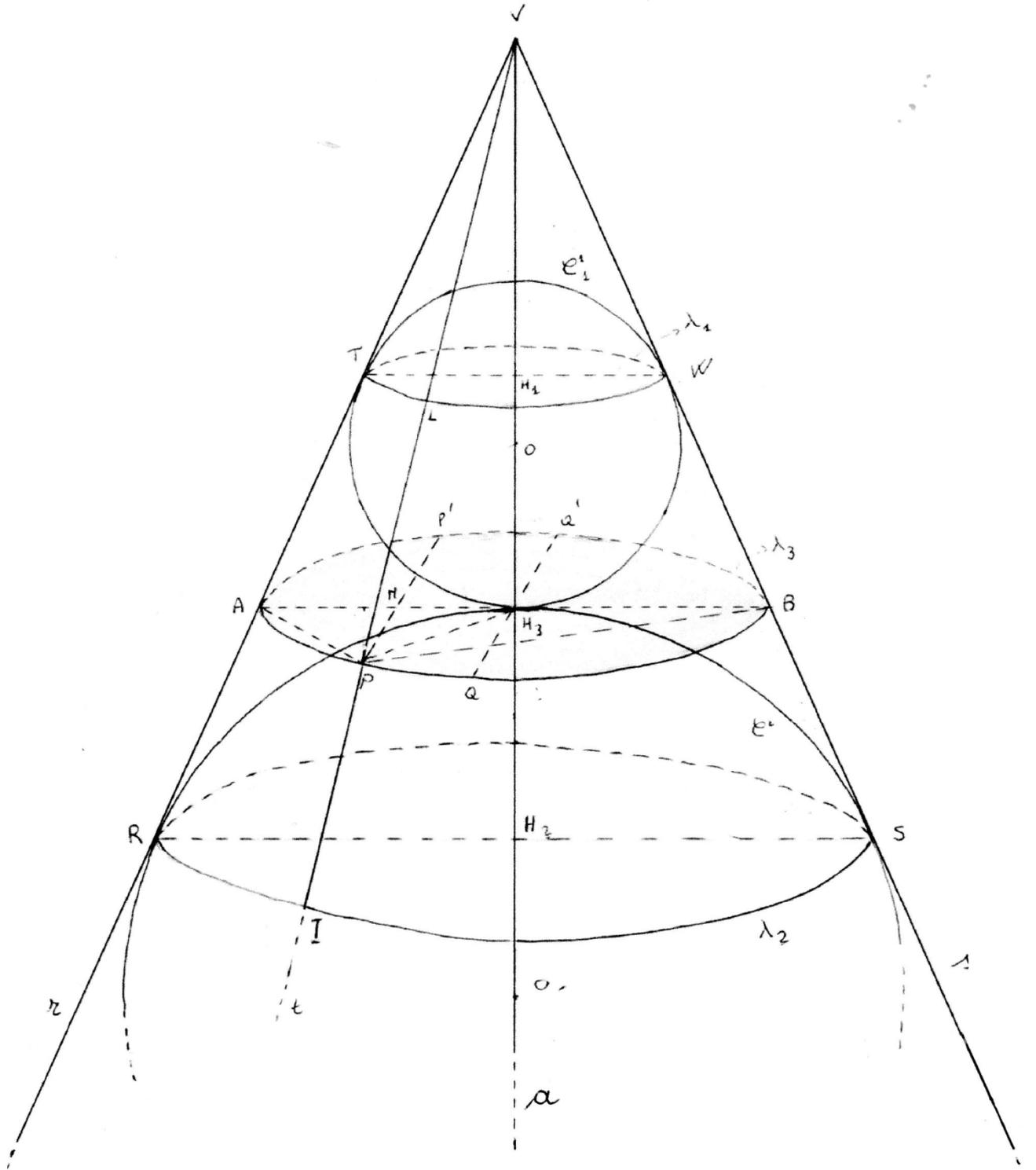


Fig. 4

Preliminari

Facendo riferimento alla fig. 4) , siano dati una superficie conica indefinita di rotazione, con vertice in V e asse \mathbf{a} , un piano π , che non passa per il vertice V e che forma con l'asse \mathbf{a} un angolo retto quindi maggiore dell'angolo di semiapertura della superficie conica. Tale piano, per il corollario del teorema 9) , interseca tutte le generatrici della superficie conica, i cui punti di intersezione costituiscono la figura piana sezione conica Γ : detta **circonferenza**.

Tale sezione conica risulta un caso particolare dell' Ellisse: infatti l'angolo, formato tra piano π e asse \mathbf{a} , è retto ed è maggiore dell'angolo acuto di semiapertura del cono; e inoltre il piano π incontra tutte le generatrici della superficie di rotazione uscenti dal vertice.

Siano H_3 , punto di intersezione del piano π e l'asse \mathbf{a} , il centro di Γ ed il segmento \mathbf{AB} , con A e B rispettivamente i punti di intersezione del piano π con le due generatrici r ed s simmetriche rispetto all'asse \mathbf{a} , il diametro di Γ .

Il piano π divide il cono indefinito di rotazione in due parti: una costituita da un cono retto ed una da un tronco di cono retto indefinito. Come per l'ellisse al cono retto possiamo inscrivere ed exinscrivere due sfere \mathcal{C} e \mathcal{C}' , che sono tangenti alla superficie conica interna in due circonferenze λ_1 e λ_2 con centri rispettivamente H_1 ed H_2 e diametri rispettivamente TW e RS , con H_1 e H_2 appartenenti all'asse \mathbf{a} del cono , T ed R appartenenti alla generatrice r , W e S appartenenti alla generatrice s . Anche in questo contesto si può dimostrare, come si è fatto per l'ellisse, che i punti di λ_1 e λ_2 appartenenti alla stessa generatrice sono equidistanti a quelli di un'altra generatrice: cioè $TR = WS$ ed i piani sostegno di λ_1 e λ_2 sono paralleli. Per analogia si può dimostrare che i punti di Γ e λ_1 appartenenti alla stessa generatrice sono equidistanti a quelli appartenenti ad un'altra generatrice; così pure che i punti di Γ e λ_2 appartenenti alla stessa generatrice sono equidistanti a quelli appartenenti ad un'altra generatrice; e inoltre che i piani sostegno di Γ , λ_1 e λ_2 sono fra loro paralleli. Le due sfere \mathcal{C} e \mathcal{C}' sono tangenti al piano π nel punto H_3 .

Ricerca relazione fondamentale della circonferenza

Tutte le considerazioni effettuate sull'ellisse per determinare le relazioni geometriche che definivano le proprietà dei punti della sezione conica e permettevano poi di individuare le equazioni, si possono riportare anche per la circonferenza Γ : l'unica anomalia è che la circonferenza Γ non ammette rette direttrici e che fuochi e punto medio di AB coincidono con il centro H_3 di Γ e di conseguenza $QM \equiv AM$ e sono uguali al raggio della circonferenza Γ ; r . Quindi i parametri presenti nell'equazione dell'ellisse a , b e c , in questo contesto sono uguali ad $a = b = r$ e $c = 0$.

Sia P un generico punto della circonferenza Γ . Si tracci da P la perpendicolare al diametro AB , questa interseca AB in N e Γ in P' . Il triangolo APB è un triangolo rettangolo in quanto iscritto in una semicirconferenza e PN costituisce l'altezza relativa all'ipotenusa AB e pertanto al triangolo si può applicare il II teorema di Euclide:

$$PN^2 = AN \cdot NB$$

Posto $AN = x$, $NB = 2r - x$ e $PN = y$, si ha: $y^2 = x (2r - x)$ e moltiplicando, si ottiene

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Tale equazione analoga a quella dell'ellisse nella versione di Apollonio: basti porre in quella $a = r$ e $\frac{b^2}{a^2} = 1$, essendo in questo contesto $a = b$.

Posto invece $NH_3 = x$, $PN = y$ e di conseguenza $AN = r - x$ e $NB = r + x$, si ha

$$y^2 = (r - x)(r + x)$$

moltiplicando si ha

$$y^2 = r^2 - x^2$$

portando al primo membro la variabile x^2 , si ottiene

$$y^2 + x^2 = r^2$$

di qui la definizione di circonferenza come luogo geometrico:

Def. 20) Si chiama *circonferenza* il luogo dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è uguale al raggio.

I piani sostegno di λ_1 , di λ_2 ed il piano π sono piani paralleli e quindi non hanno né punti né rette comuni, pertanto la circonferenza non ammette rette direttrici a differenza dell'ellisse. Tuttavia si avrà modo di vedere che anche la circonferenza ammette rette direttrici con l'ampliamento di teorie matematiche.

In analogia con l'ellisse, posto $\frac{c}{a} = e$ con $c = 0$ e $a \neq 0$, si può affermare che l'eccentricità della circonferenza è uguale a zero.

PARABOLA

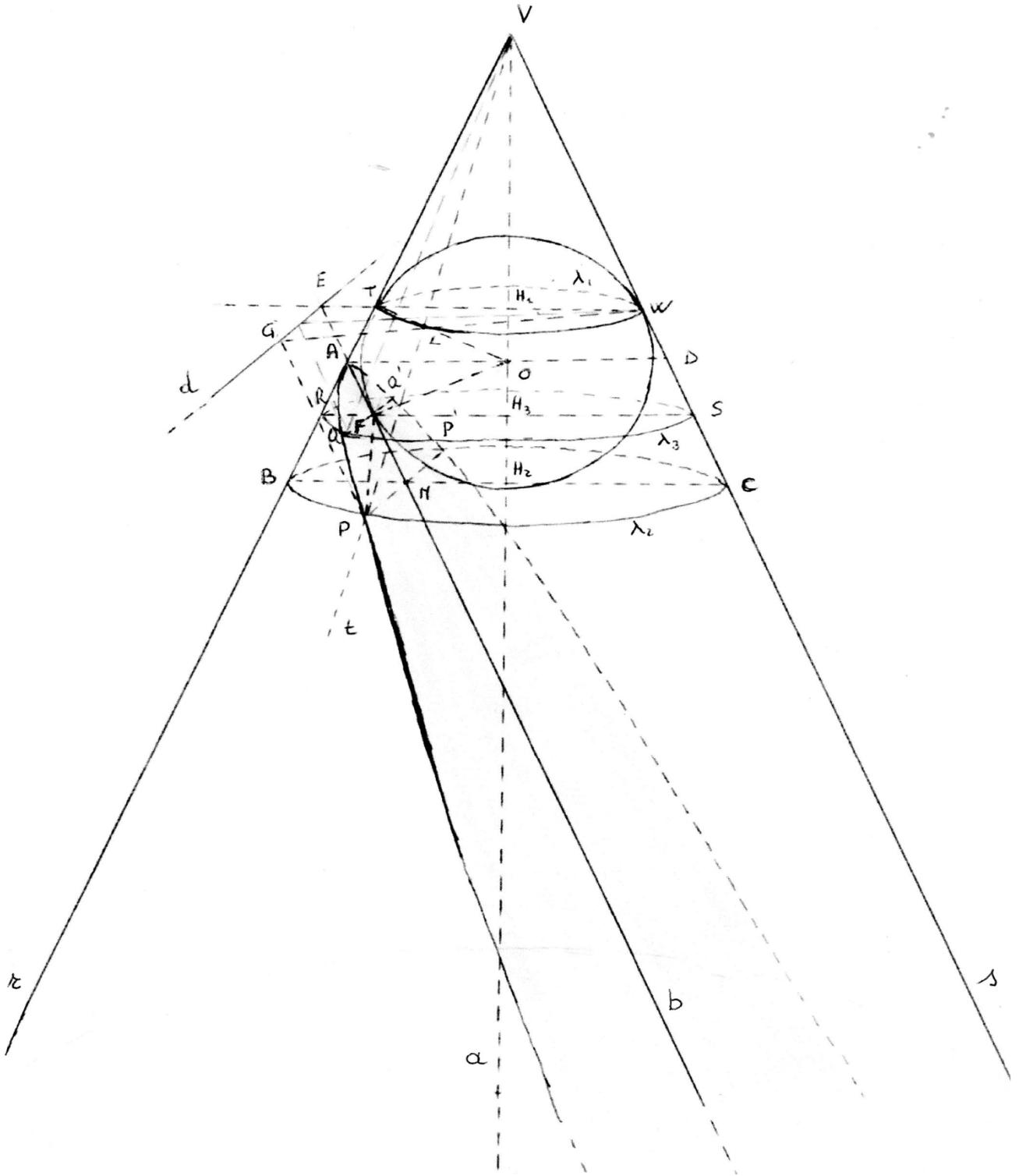


Fig. 8

Preliminari

Facendo riferimento alla fig. 8), siano dati una superficie conica indefinita di rotazione, con vertice in V e asse a , un piano π , che non passa per il vertice V e che forma con l'asse a un angolo congruente all'angolo di semiapertura della superficie conica. Il piano π interseca tutte le generatrici della superficie conica indefinita uscenti da V fatta eccezione di una, a cui risulta parallelo: relativamente alla figura tale retta è la generatrice s .

Tale piano interseca in particolare la retta r simmetrica di s rispetto all'asse del cono nel punto A .

Teorema 19) Dimostrare che VA è il segmento di minima distanza fra quelli aventi per estremi V e i punti di intersezione di π con le altre generatrici.

Dimostrazione

Tracciata la retta b proiezione dell'asse a su π , la retta b è pure proiezione della generatrice r su π . Presa una generica generatrice z della superficie conica, sia Z il punto di intersezione di π con z ; si determini il punto K di b tale che $AZ = AK$ e si considerano i due triangoli VAZ e VAK questi hanno VA in comune, $AZ = AK$ per costruzione, $VAK < VAZ$ in quanto VAK è l'angolo acuto tra r ed π , quindi per la disuguaglianza fra triangoli discende che $VZ > VA$. Vista la genericità della scelta di z vale per qualunque altra generatrice.

C.V.D.

L'insieme dei punti di π appartenenti alla superficie conica indefinita costituisce la sezione conica Γ .

Il piano π divide il cono in due regioni infinite, di cui una contiene il vertice V e la generatrice s . In tale zona si inscriva una sfera \mathcal{S} di centro O , che appartiene all'asse a del cono. Tale sfera tange internamente la superficie conica in un insieme di punti equidistanti dal vertice e pertanto determinano una circonferenza λ_1 di centro H_1 , elemento dell'asse a . La circonferenza λ_1 tange le generatrici r ed s rispettivamente in T e W , che costituiscono gli estremi del diametro TW di λ_1 . Si dimostra che TW è perpendicolare all'asse del cono nel centro H_1 di λ_1 . La sfera \mathcal{S} tocca il piano π nel punto F , elemento di b .

Si tracci da F il piano γ perpendicolare all'asse a del cono, questo piano interseca la superficie conica in una circonferenza λ_3 di diametro RS , con R ed S appartenenti rispettivamente alle generatrici simmetriche r ed s , e centro H_3 elemento dell'asse del cono. RS è perpendicolare all'asse a del cono come il diametro TW di λ_1 e pertanto RS è parallelo a TW , così pure γ è parallelo al piano sostegno della circonferenza λ_1 . La circonferenza λ_3 interseca la sezione conica Γ in due punti simmetrici Q e Q' sia rispetto a b che rispetto ad RS , pertanto la retta sostegno di Q e Q' è perpendicolare sia alla retta b che al diametro RS nel loro punto di intersezione F . La retta sostegno di Q e Q' costituisce pure la retta intersezione tra i due piani π e γ .

La retta b e la retta sostegno del diametro TW di λ_1 appartengono al piano individuato dalle generatrici r ed s ; formando angoli diseguali con l'asse del cono, esse sono tra loro non parallele e si intersecano nel punto E . Il piano π ed il piano sostegno della circonferenza λ_1 avendo in comune il punto E hanno in comune una retta d passante per E , che risulta perpendicolare sia alla retta b che alla retta sostegno di T e W , essendo il piano γ parallelo al piano sostegno di λ_1 e il piano π costituisce il piano trasversale quindi d e la retta sostegno di Q e Q' presentano le stesse proprietà.

Teorema 20) Dimostrare che AF è congruente ad AE.

Dimostrazione

Si considerino i triangoli AET e AFR (fig. 5), questi hanno $AT = AF$ perché segmenti di tangente condotte dallo stesso punto A alla sfera \mathcal{C}' , $ARF = ATF$ perché angoli alterni interni di rette parallele $TW \parallel RS$, $RAF = EAT$ perché angoli opposti al vertice, per il II criterio di congruenza dei triangoli $AET = AFR$, in particolare $AE = AF$.

C.V.D.

Il punto A è punto medio del segmento EF, che costituisce la distanza di F da d : $EF = d(F, d)$.
Si consideri un punto generico P della sezione conica Γ . Sia δ un piano passante per P e perpendicolare all'asse a del cono. Tale piano interseca la superficie conica in una circonferenza λ_2 e siano B e C i punti di intersezione di δ rispettivamente con le generatrici r ed s, tale piano interseca l'asse a nel punto H_2 . Il segmento BC costituisce un diametro di λ_2 ed H_2 il suo centro. Se da P si traccia la perpendicolare al segmento BC, tale retta costituisce la retta intersezione tra i piani π e δ e pertanto si trova nelle condizioni della retta d, della retta sostegno di Q e Q': anzi risulta parallela a queste. La retta perpendicolare a BC passante per P interseca la sezione conica Γ oltre che in P anche in P' simmetrico di P rispetto a BC e quindi P' elemento di λ_2 ; così pure tale retta perpendicolare interseca BC nel punto N.

Prima definizione di Parabola secondo i canoni di Apollonio

Si consideri il triangolo BPC, esso è inscritto in una semicirconferenza di diametro BC con PN l'altezza relativa a PC. Si applichi a detto triangolo il II teorema di Euclide.

$$PN^2 = BN \cdot NC$$

Si considerino i due triangoli NAB e RVS, questi hanno

$ABN = VRS$ perché corrispondenti di $BC \parallel RS$ tagliate dalla trasversale r

$BAN = RVS$ perché angoli formati da lati paralleli e concordi

Quindi i due triangoli sono simili e pertanto hanno i lati in proporzione:

$$BN : AN = RS : VR \quad \text{da cui} \quad BN = \frac{AN \cdot RS}{VR}$$

Si tracci da A la parallela ad RS, essa interseca la generatrice s in D. Si considerino i triangoli AVD e RVS, questi hanno

$AVD = RVS$ perché coincidenti

$VAD = VRS$ perché corrispondenti di rette parallele $AD \parallel RS$ tagliate dalla trasversale r

Quindi i due triangoli sono simili e pertanto hanno i lati in proporzione:

$$AD : AV = RS : VR \quad \text{da cui} \quad AD = \frac{AV \cdot RS}{VR}$$

Si consideri il quadrilatero ANCD, avendo i lati opposti paralleli per costruzione è un parallelogrammo quindi $AD = NC$; sostituendo in $AD = \frac{AV \cdot RS}{VR}$ si ha

$$NC = \frac{AV \cdot RS}{VR}$$

Sostituendo $BN = \frac{AN \cdot RS}{VR}$ e $NC = \frac{AV \cdot RS}{VR}$ in $PN^2 = BN \cdot NC$, si ha la relazione cercata:

$$PN^2 = \frac{AN \cdot RS}{VR} \cdot \frac{AV \cdot RS}{VR}$$

Moltiplicando e ordinando si ha

$$PN^2 = \frac{RS^2}{VR^2} \cdot AV \cdot AN$$

I segmenti RS, VR, AV sono delle costanti al variare del punto P nella sezione conica Γ , mentre AN al varare di P varia. Posto $l = \frac{RS^2}{VR^2} \cdot AV$, si ha la **relazione di Apollonio**

$$PN^2 = l \cdot AN$$

Questa relazione afferma “ dato un rettangolo di lato assegnato l trovare un quadrato di uguale area “. Di qui il nome dato da Apollonio a questa sezione conica di *parabola*, dal greco confrontare, sovrapporre. Questa parola era già nota ai matematici greci che l’avevano usata in un altro contesto nella risoluzione geometrica di equazioni di secondo grado: $x^2 = ax$. (vedere Appendice)

Def. 20) Si chiami *parabola* la sezione conica Γ i cui punti P soddisfano la relazione $PN^2 = l \cdot AN$, dove N è il piede della perpendicolare condotto da P alla retta **b**, l parametro della conica.

Ricerca dell’equazione della parabola a noi oggi nota a partire dalla relazione di Apollonio

Vogliamo ora con simbologia dell’algebra moderna trovare l’equazione della parabola oggi nota in qualsiasi corso di scuola secondaria di 2° grado. A tal proposito sostituiamo incognite e parametri opportuni, ma prima vogliamo determinare il valore di l in funzione di $d(F, d) = FE = p$.

Si considerino i due triangoli simili NAB e ADV, in quanto entrambi simili al triangolo RVS.

Pertanto hanno i lati in proporzione: $BN : AN = AD : AV$, da cui $BN = AN \cdot \frac{AD}{AV}$. Sia O’ il punto di intersezione di b con l’asse a del cono e si consideri il quadrilatero AO’DV, avendo i lati congruenti, le diagonali perpendicolari ed essendo circoscritto alla sfera esso è un rombo con il centro il centro della sfera.

Si consideri il triangolo rettangolo AOV con OT perpendicolare ad VA e si applichi ad esso il I teorema di Euclide: $AO^2 = AV \cdot AT$, ma AO è la metà di AD, quindi $AD^2 = 4 AV \cdot AT$.

Sostituendo $BN = AN \cdot \frac{AD}{AV}$ in $PN^2 = BN \cdot NC$ e tenendo conto che $NC = AD$, si ha

$$PN^2 = AN \cdot \frac{AD^2}{AV}; \text{ sostituendo in questa } AD^2 = 4 AV \cdot AT \text{ e semplificando, si ha}$$

$$PN^2 = 4 AT \cdot AN$$

ma $AT = AF = \frac{d(F, d)}{2} = \frac{p}{2}$, quindi $l = 2p$: il valore di p è detto parametro della parabola come d’altronde è l .

Posto dunque $PN = y$, $AN = x$, si ha

$$y^2 = 2p x$$

Seconda definizione di Parabola : come uguaglianza di distanze

Sia t la retta generatrice uscente dal vertice V e passante per P . Questa interseca λ_1 in L , λ_2 in P e λ_3 in I . I punti di λ_1 , di λ_2 e di λ_3 si è detto sono equidistanti dal vertice V , si possono quindi scrivere le seguenti congruenze :

$$VT = VL = VW \quad , \quad VR = VI = VS \quad \text{e} \quad VB = VP = VC$$

Poiché somma o differenza di segmenti congruenti sono congruenti, si possono scrivere anche $VB - VT = VP - VL = VC - VW$: cioè $BT = PL = CW$

Si considerino i segmenti PL e PF , essi sono segmenti di tangenza condotti da P alla sfera \mathcal{C} , pertanto sono congruenti: $PL = PF$. Per la proprietà transitiva della congruenza si può affermare che $BT = PF$

Si considerino i triangoli TEA e TVW , questi sono simili, per avere due angoli ordinatamente congruenti: $ETA = VTW$ perché opposti al vertice, $TEA = VWT$ perché alterni interni di rette parallele g e b tagliate dalla trasversale la retta sostegno di T e W . Ora il triangolo TVW è isoscele sulla base TW , quindi anche TEA è isoscele sulla base TE : $EA = TA$. Si considerino i triangoli TEA e BAN per analogo ragionamento avendo due angoli congruenti sono simili ed essendo TEA isoscele anche BAN è isoscele sulla base BN ; pertanto si può affermare che $AB = AN$. Si consideri il segmento BT , esso può essere decomposto in somma di segmenti: $BT = BA + AT$, ma $BA = AN$ e $AT = AE$, sostituendo si ha $AN + AE = BT$, da cui $NE = BT$ e per la proprietà transitiva della congruenza $NE = PF$

Si tracci da P sul piano π la perpendicolare alla retta d e sia G il suo piede. Il quadrilatero $PNEG$ avendo i lati a due paralleli e gli angoli retti è un rettangolo e pertanto $PG = NE$. Sempre per la proprietà transitiva si ha:

$$PF = PG$$

Dove PG è la distanza del punto P dalla retta d : $PG = d(P, d)$, sostituendo

$$6) \quad PF = d(P, d)$$

Questa relazione geometrica possiamo accettarla come proprietà dei punti P di Γ , anzi essa introduce la conica come *luogo geometrico piano*: cioè

Def . 21) **Si chiama parabola il luogo geometrico dei punti P del piano π tale che la distanza di P da un punto fisso (F) sia uguale alla distanza di P da una retta fissa (d)**

Si trasformi anche in questo caso l'equazione del luogo, scegliendo opportuni parametri ed incognite.

Si consideri il triangolo rettangolo PFN e si applichi il teorema di Pitagora: $PF^2 = FN^2 + PN^2$.

$$PF = \sqrt{FN^2 + PN^2}$$

Posto $AN = x$, $PN = y$ e $AF = \frac{p}{2}$, si ha $FN = \left(x - \frac{p}{2}\right)$ e $d(P, d) = \left(x + \frac{p}{2}\right)$. Sostituendo nella relazione 6) si ha l'equazione

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left(x + \frac{p}{2}\right)$$

Razionalizzando

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

da cui, sviluppando i quadrati, si ha

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Riducendo algebricamente si ottiene l'equazione risolvente il luogo geometrico

$$y^2 = 2p x$$

Terza definizione di Parabola : come rapporto di distanze

Si dividano ambo i termini della 6) per $d(P, d)$ e si ottiene:

$$\frac{PF}{d(P, d)} = 1$$

Anche questa relazione introduce la conica come luogo geometrico:

Def. 22) Si chiama *parabola* il luogo geometrico dei punti P del piano π tale che il rapporto delle distanze da un punto fisso F e da una retta fissa d è uguale ad 1 .

Posto $\frac{PF}{d(P, d)} = e$, con $e = 1$, si può scrivere:

$$\frac{PF}{d(P, d)} = e$$

In analogia con l'ellisse si può affermare che l'eccentricità della parabola vale 1.

Conclusione:

L'impostazione stereometrica della sezione conica *parabola* permette di esprimere alcune considerazioni:

- La superficie conica indefinita (o il cono indefinito) ed il piano sezione, che interseca tutte le generatrici della superficie conica eccetto una, devono essere prioritariamente assegnati e non sono soggette a modifiche durante la trattazione
Se uno di questi o entrambi variano, purché l'angolo fra asse del cono e piano sezione rimane uguale all'angolo di semiapertura del cono, non cambia la natura della sezione conica, ma cambiano le lunghezze dei segmenti costanti: cioè i valori dei parametri; e, di conseguenza cambiano i loro rapporti, ottenendo così diversi tipi di parabola.
- Le proprietà dei punti della sezione conica sono emerse da considerazioni geometriche: infatti attraverso una serie di assiomi, di teoremi, di corollari e di definizioni ora di geometria piana ora di geometria solida si è riusciti a individuare e dimostrare relazione fra segmenti opportuni che determinano univocamente le proprietà di detti punti.

- Nelle relazioni si fa riferimento a grandezze variabili e a grandezze costanti o parametriche sempre di tipo assoluto: per i matematici greci le grandezze sono sempre segmenti o aree o rapporti di questi. Relativamente alla figura proposta durante la trattazione
 - 4) nella relazione di Apollonio sono
 - variabili i segmenti AN e PN
 - costanti i segmenti RS, VR e AV
 - 5) nella definizione di parabola come rapporto di distanze sono
 - variabili i segmenti AN, PN, PF e $d(P, d)$
 - costanti i segmenti AF
- La trasformazione delle relazioni geometriche nel linguaggio moderno di tipo algebrico con relativo bagaglio operativo è servito semplicemente a rendere più snello il calcolo e più chiari e semplici i risultati raggiunti. Tale trasformazione ha permesso di formalizzare in termini di equazioni o identità dette relazioni geometriche e di constatare che tutte e tre ricerche conducono allo stesso risultato.

Nella Storia della Matematica alcuni punti , alcune rette, alcuni segmenti incontrati nella trattazione hanno assunto nomi particolari in funzione del ruolo applicativo che i matematici hanno ritenuto attribuire ed usare nei loro scritti: così

- Il punto F è detto *fuoco*: di conseguenza la parabola ha un fuoco F
- Il punto A è detto *vertice*
- La retta d è detta *direttrice*: di conseguenza la parabola ha una sola direttrice d
- La retta b è detta *asse di simmetria della parabola*
- Il rapporto $e = \frac{PF}{d(P,d)}$ è detto *eccentricità e vale 1*

5 IPERBOLE

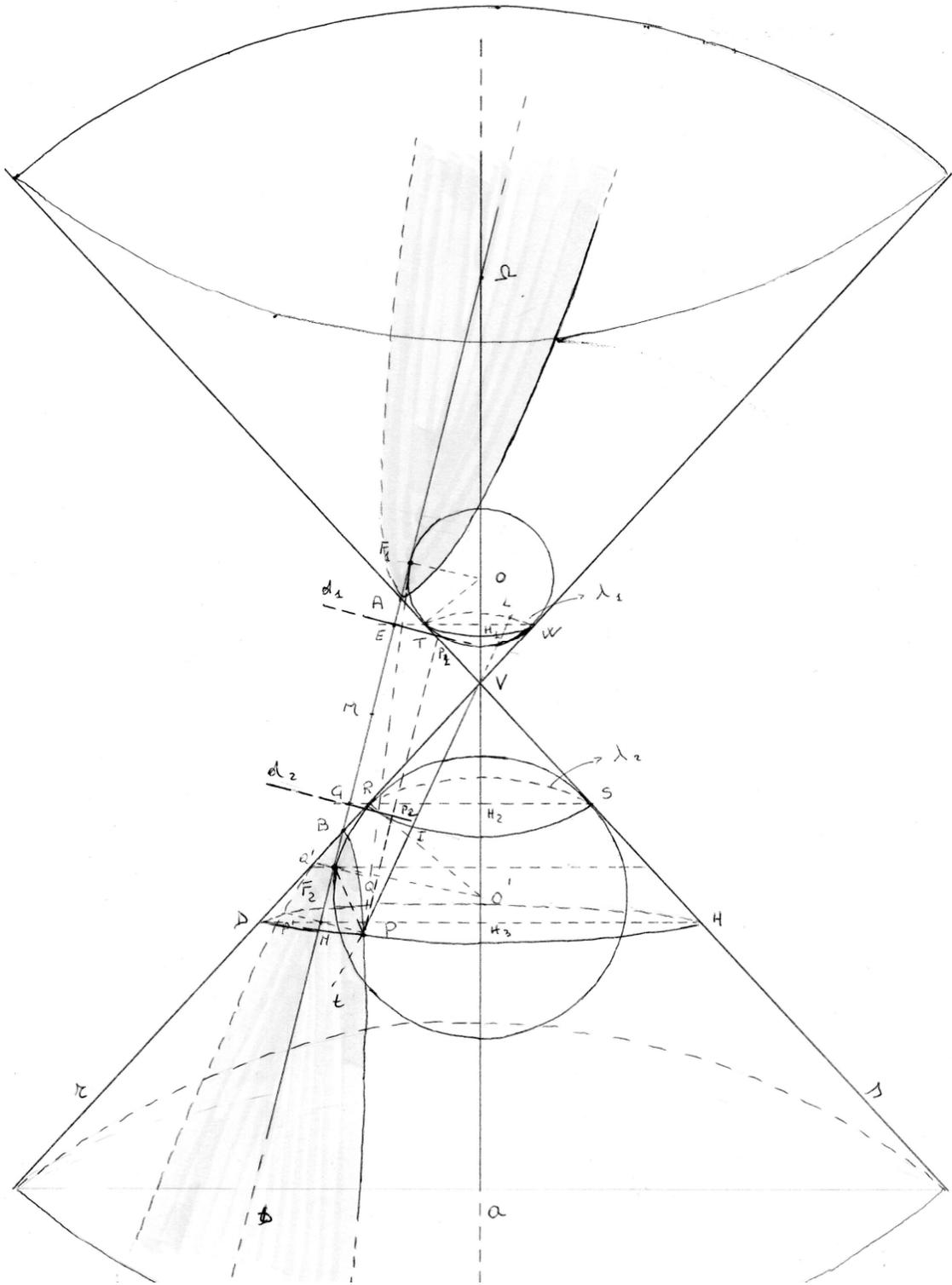


Fig. 9

Preliminari

Facendo riferimento alla fig. 9)

Sia dato una superficie conica indefinita di rotazione a due falde di vertice \mathbf{V} e asse \mathbf{a} . Sia π un piano, che non passa per il vertice \mathbf{V} e che forma con l'asse \mathbf{a} un angolo minore dell'angolo di semiapertura del cono. Tale piano, dal corollario del Teorema 9), interseca tutte le generatrici del cono, eccetto due il cui piano è parallelo al piano π ed i cui punti costituiscono la figura sezione conica Γ , costituita da due rami una in una falda e l'altra nell'altra: detta **iperbole**.

Si consideri la retta \mathbf{b} proiezione dell'asse \mathbf{a} sul piano π , tale retta interseca due generatrici \mathbf{s} ed \mathbf{r} , simmetriche rispetto all'asse \mathbf{a} , nei punti \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Il piano π taglia le falde del cono in due parti indefinite, di cui una contiene la semiretta generatrice \mathbf{r} ed il vertice \mathbf{V} e l'altra la semiretta generatrice \mathbf{s} ed il vertice \mathbf{V} . In entrambe queste parti di falda è possibile inscrivere rispettivamente le sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 di centri rispettivamente \mathbf{O} ed \mathbf{O}' , che toccano internamente la superficie conica nelle circonferenze λ_1 e λ_2 di diametro rispettivamente \mathbf{TW} ed \mathbf{RS} (con \mathbf{W} ed \mathbf{R} appartenenti alla generatrice \mathbf{r} e con \mathbf{T} ed \mathbf{S} appartenenti alla generatrice \mathbf{s}) e di centro rispettivamente \mathbf{H}_1 ed \mathbf{H}_2 (con \mathbf{O} , \mathbf{O}' , \mathbf{H}_1 ed \mathbf{H}_2 appartenenti all'asse \mathbf{a} del cono). Le sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 sono pure tangenti al piano π nei suoi punti \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 , che appartengono alla retta proiezione \mathbf{b} dell'asse \mathbf{a} su π e pertanto sono esterni al segmento \mathbf{AB} .

Anche in questo contesto valgono gli stessi teoremi con relativi corollari dimostrati nei preliminari dell'ellisse: precisamente

Teorema 15: Dimostrare che i punti di λ_1 e λ_2 , appartenenti alla stessa generatrice, sono equidistanti e le circonferenze appartengono a piani paralleli.

Teorema 16: Dimostrare che il segmento \mathbf{AB} è uguale ai segmenti di estremi i punti di λ_1 e λ_2 , appartenenti alla stessa generatrice.

Corollario. I punti di tangenza \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 delle due sfere \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 col piano π hanno la stessa distanza rispettivamente da \mathbf{A} e da \mathbf{B} : cioè $\mathbf{AF}_1 = \mathbf{BF}_2$

Teorema 17. Se \mathbf{M} è punto medio di \mathbf{AB} , allora \mathbf{M} è punto medio di $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$.

Prima definizione di Iperbole secondo i canoni di Apollonio

Sia \mathbf{P} un generico punto della sezione conica Γ e tracciamo da \mathbf{P} la retta perpendicolare sul piano π alla retta \mathbf{b} , tale retta interseca \mathbf{b} in \mathbf{N} , che costituisce il piede della perpendicolare condotta da \mathbf{P} a \mathbf{b} , e la sezione conica Γ nel punto \mathbf{P}' , simmetrico di \mathbf{P} rispetto alla retta \mathbf{b} . Al variare di \mathbf{P} su Γ , variano i punti \mathbf{N} e \mathbf{P}' : mentre restano invariate le posizioni di tutti gli altri punti sia della superficie conica sia del piano π . Pertanto stabiliti

- a) Il cono circolare retto a doppia falda con il suo angolo di semiapertura
- b) Il piano π di intersezione, che forma con l'asse \mathbf{a} del cono un determinato angolo acuto

- c) La retta b proiezione dell'asse a sul piano π e le intersezioni di b con due generatrici: A e B
 d) Le sfere inscritte con le relative circonferenze di tangenza

Possiamo affermare che i segmenti con relative lunghezze assolute AB, F_1F_2 , sono delle costanti: cioè non dipendono dalla scelta del punto generico P della sezione conica Γ : ciò permette con scrittura moderna di porre $AB = 2a$, $F_1F_2 = 2c$, dove a, c sono dei parametri: cioè grandezze assegnate ma non note.

Facendo sempre riferimento alla figura 6), tracciamo dal generico punto P la circonferenza λ_3 , i cui punti giacciono sulla superficie conica. Tale circonferenza è costituita da punti equidistanti dal vertice V del cono e pertanto come per λ_1 e per λ_2 il suo piano è parallelo a quello di λ_1 e λ_2 . Sia DH il suo diametro con D appartenente alla generatrice r ed H appartenente alla generatrice s. Il piano sostegno di λ_3 ha in comune con il piano π il punto P e per il teorema "Se due piani hanno in comune un punto hanno in comune una retta passante per quel punto" la retta sostegno di λ_3 è la retta intersezione dei due piani. Pertanto N appartiene al diametro di λ_3 e PP' è ad esso perpendicolare.

Consideriamo il triangolo DPH. Tale triangolo, essendo inscritto in una semicirconferenza, è retto in P. Poichè PN è perpendicolare a DH in N suo elemento, DN è l'altezza di DPH relativa all'ipotenusa DH. A questo triangolo applichiamo il II Teorema di Euclide e pertanto possiamo scrivere:

$$2) \quad PN^2 = DN \times NH$$

Sia G il punto di intersezione della retta proiezione b con la retta sostegno del diametro RS di λ_2 ; e, E il punto di intersezione di b con la retta sostegno di TW di λ_1 .

Consideriamo i due triangoli DBN e EBW. Questi hanno

DBN = EBW perché opposti al vertice

BDN = EWB perché corrispondenti di $DN \parallel RS$ tagliate dalla trasversale r

BND = BEW perché corrispondenti di $DN \parallel RS$ tagliate dalla trasversale b

Avendo tutti gli angoli congruenti i due triangoli DBN e EBW risultano simili per il I° criterio di similitudine dei triangoli e pertanto hanno i lati in proporzione:

$$BN : EB = DN : EW \quad \text{da cui} \quad DN = \frac{BN \cdot EW}{EB}$$

Consideriamo i due triangoli AGS e ANH. Questi hanno

GAS = NAH perché in comune

AGS = ANH perché corrispondenti di $DN \parallel RS$ tagliate dalla trasversale b

ASG = AHN perché corrispondenti di $DN \parallel RS$ tagliate dalla trasversale s

Avendo tutti gli angoli congruenti i due triangoli AGS e ANH risultano simili per il I° criterio di similitudine dei triangoli e pertanto hanno i lati in proporzione:

$$NH : SG = AN : AG \quad \text{da cui} \quad NH = \frac{AN \cdot SG}{AG}$$

Andando a sostituire in 2) DN ed NH, otteniamo la seguente relazione:

$$3) \quad PN^2 = AN \cdot BN \cdot \frac{EW \cdot SG}{AG \cdot EB}$$

In questa relazione al variare di P varia come si è detto N e di conseguenza AN e NB, mentre SG, EW, AG e EB non dipendono da P. Pertanto il rapporto $\frac{EW \cdot SG}{AG \cdot EB}$ risulta una costante, in analogia

con l'ellisse porremo $\frac{EW \cdot SG}{AG \cdot EB} = \frac{QM^2}{AM^2}$ che andremo in seguito a specificare il ruolo del punto Q

Sostituendo nella relazione 3) e considerando che $AN = AB + BN = 2AM + BN$, si ha

$$4) \quad PN^2 = (2AM + BN) \cdot BN \cdot \frac{QM^2}{AM^2}$$

Moltiplicando e semplificando, si ha

$$PN^2 = \frac{2QM^2}{AM} BN + \frac{QM^2}{AM^2} BN^2$$

che risulta **la relazione trovata da Apollonio**

Posto $QM = b$ ed $AM = a$, la relazione di Apollonio diviene:

$$PN^2 = \frac{2b^2}{a} BN + \frac{b^2}{a^2} BN^2$$

Posto ancora $l = \frac{2b^2}{a}$, la relazione diviene

$$PN^2 = l \cdot BN + \frac{b^2}{a^2} \cdot BN^2$$

Questa relazione afferma:

“ Assegnato un segmento di misura l trovare il rettangolo che aumentato di un quadrato sia equivalente ad un secondo quadrato “

Da questa affermazione scaturisce il nome attribuito a questa sezione conica *Iperbole*, che in greco significa *eccede, va al di là*: cioè il quadrato è equivalente al rettangolo di lato assegnato l *eccedente* di un quadrato. Questa parola era già nota ai matematici greci che l'avevano usata in un altro contesto nella risoluzione geometrica di equazioni di secondo grado: $x^2 - b^2 = ax$. (vedere Appendice)

Def. 23) Si chiami *iperbole* la sezione conica Γ i cui punti P soddisfano la relazione $PN^2 = l \cdot BN - \frac{b^2}{a^2} \cdot BN^2$, dove N è il piede della perpendicolare condotto da P alla retta **b**, $l = \frac{2b^2}{a}$, con a e b parametri della conica.

Ricerca dell'equazione dell'iperbole a noi oggi nota a partire dalla relazione di Apollonio

Con scrittura dell'algebra moderna posto

$$PN = y, \quad MN = x, \quad AM = a = MB, \quad AN = x + a, \quad BN = x - a, \quad \frac{EW \cdot SG}{AG \cdot EB} = \frac{b^2}{a^2}$$

e andando a sostituire in 3), si ha l'equazione:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x + a)(x - a)$$

Moltiplicando e semplificando, si ha

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$$

Applicando regole algebriche, si ha

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2$$

Dividendo ambo i termini per b^2 si ha l'equazione dell'iperbole come la si studia oggi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cerchiamo il significato geometrico di b e l .

La sezione conica Γ , detta ora iperbole, è l'intersezione del piano π con la superficie conica indefinita a due falde: piano parallelo a due generatrici v e v' , quindi parallelo al piano individuato da dette generatrici. Se si tracciano sul piano π due rette w e w' passanti per M , punto medio di AB , parallele a v e v' , queste come v e v' non vengono intersecate dalla sezione conica Γ : esse costituiscono le rette asintotiche o asintoti di Γ . Con centro in M si traccia la circonferenza di raggio MF , questa circonferenza interseca w in Q e w' in Q' . Si consideri il triangolo QMQ' , esso è isoscele sulla base QQ' , essendo $MQ=MQ'$ raggi della stessa circonferenza, con MF bisettrice altezza e mediana. Poichè Q e Q' , sono punti simmetrici rispetto a b , allora QQ' è perpendicolare a b . Si dimostra che A è il punto di intersezione di QQ' con la retta b : $QA = AQ'$: infatti sia il triangolo F_1QF_2 che MAQ sono rettangoli e valgono i teoremi di Euclide e di Pitagora.

Dal triangolo F_1QF_2 si ha $QA^2 = F_1A \cdot F_2A$, dal triangolo MAQ si ha $QA^2 = MQ^2 - MA^2$; ma $MQ = MF_1 = MF_2$, sostituendo $QA^2 = MF_1^2 - MA^2 = (MF_1+MA)(MF_1-MA) = (MF_2+MA)(MF_1-MA) = F_2A \cdot F_1A$

Posto $QQ' = 2b$, si ha $MA = a$ e $AQ = b$, essendo A punto medio di QQ' . Sia la seguente relazione, applicando il teorema di Pitagora al triangolo MBQ : $a^2 + b^2 = c^2$, dove $c = MF$.

$$b = AQ \text{ e } l = \frac{2AQ^2}{AM}$$

La relazione $a^2 + b^2 = c^2$ è detta pure *condizione che lega i parametri* dell'equazione dell'iperbole

Seconda definizione di Iperbole come luogo geometrico: differenza di distanze

Facendo riferimento alla fig. 8), abbiamo dimostrato che $RW = LI = TS = AB$ e che $AF_1 = BF_2$. Consideriamo i segmenti PF_1 e PL , questi sono segmenti di tangente condotte da P alla sfera \mathcal{C} e quindi sono congruenti: $PF_1 = PL$. Considerino i segmenti PF_2 e PI , questi sono segmenti di tangente condotte da P alla sfera \mathcal{C}' e quindi sono congruenti: $PF_2 = PI$. Dal teorema "Differenza di segmenti congruenti sono congruenti" si ha $PF_1 - PF_2 = PL - PI = LI = AB$: cioè

$$5) \quad PF_1 - PF_2 = AB$$

Questa relazione geometrica stabilisce che, comunque sia P elemento della sezione conica, la differenza dei segmenti aventi per estremi il punto P e rispettivamente i punti F_1 ed F_2 è uguale al

segmento AB. Poiché i punti P appartengono non solo alla sezione conica Γ ma anche al piano π sostegno di Γ , questa relazione stabilisce una specifica proprietà dei punti P del piano π . Facendo riferimento alla definizione euclidea di *luogo geometrico piano*: cioè l'insieme dei punti del piano che godono di una certa proprietà, si può affermare che la sezione conica che si sta trattando è un luogo geometrico la cui proprietà è quella espressa dalla relazione 5).

Def. 24) Si chiama *Iperbole* il luogo dei punti P del piano per i quali è costante (AB) la differenza delle distanze da due punti fissi (F_1 e F_2).

Ricerca dell'equazione dell'ellisse a partire dalla prima relazione di luogo

-) Prima forma : relazione di Apollonio

Posto $PN = y$, $BN = x$, $BA = 2a$, $BM = MA = a$, $AN = 2a + x$, $MF = c$, $AF_1 = BF_2 = c - a$, ed applicando ai triangoli rettangoli PNF_2 e PNF_1 il teorema di Pitagora, si ha

$$PF_1 = \sqrt{(x + a + c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad PF_2 = \sqrt{(x + a - c)^2 + y^2}$$

Sostituendo nella relazione si ha

$$\sqrt{(x + a + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + a - c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando con le regole dell'algebra moderna si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{(x + a + c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x + a - c)^2 + y^2} + 2a \\ x^2 + a^2 + c^2 + 2ax + 2cx + 2ac + y^2 &= x^2 + a^2 + c^2 + 2ax - 2cx - 2ac + \\ &+ y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x + a - c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Eliminando e sommando i monomi simili si ha

$$4a\sqrt{(x + a - c)^2 + y^2} = 4cx + 4ac - 4a^2$$

Semplificando e razionalizzando si ha

$$a^2(x^2 + a^2 + c^2 + 2ax - 2cx - 2ac + y^2) = c^2x^2 + a^2c^2 + a^4 + 2ac^2x - 2a^2cx - 2a^3c$$

Moltiplicando si ha

$$a^2x^2 + a^4 + a^2c^2 + 2a^3x - 2a^2cx - 2a^3c + a^2y^2 = c^2x^2 + a^2c^2 + a^4 + 2ac^2x - 2a^2cx - 2a^3c$$

Eliminando e trasportando si ha

$$a^2y^2 = c^2x^2 - a^2x^2 + 2ac^2x - 2a^3x$$

Raccogliendo e dividendo ambo i termini per a^2 , si ha

$$y^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 + \frac{2a(c^2 - a^2)}{a^2} x$$

Dalla relazione trovata precedentemente $a^2 + b^2 = c^2$, isolando b^2 , si ha $c^2 - a^2 = b^2$. Sostituendo Nell'equazione si ha:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{2b^2}{a} x$$

Posto $l = \frac{2b^2}{a}$, si ha la stessa equazione trovata precedentemente:

$$y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Il luogo geometrico scritto sopra definisce l'iperbole.

-) Seconda forma

Si vuole trovare l'equazione nella forma che oggi è consuetudine scriverla:

Posto $MN = x$, $MF = c$, $MA = a$ e $PN = y$ ed applicando ai triangoli rettangoli PNF_2 e PNF_1 teorema di Pitagora, si ha

$$PF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad PF_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Sostituendo nella relazione si ha

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando con le regole dell'algebra moderna si ha

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 2a$$

$$x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = x^2 + c^2 - 2cx + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Eliminando e sommando i monomi simili si ha

$$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2$$

Semplificando e razionalizzando si ha

$$a^2(x^2 + c^2 - 2cx + y^2) = c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx$$

Moltiplicando si ha

$$a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx$$

Eliminando e trasportando si ha

$$a^2y^2 = c^2x^2 - a^2x^2 + a^2c^2 - a^4$$

Portando i monomi con la x al primo membro e cambiando di segno e raccogliendo, si ha

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividendo ambo i termini per $a^2(c^2 - a^2)$ e semplificando, si ha

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Dalla relazione trovata precedentemente $a^2 + b^2 = c^2$, isolando b^2 , si ha $c^2 - a^2 = b^2$. Sostituendo

Si ha

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Terza definizione di Iperbole come luogo geometrica: rapporto di distanze

Facendo riferimento alla fig. 8), consideriamo la retta sostegno di R ed S , essa interseca la retta b in G . Il punto G appartiene al piano π . Su π si tracci la retta perpendicolare alla retta b passante per G e sia d_2 . Tale retta d_2 è parallela a NP in quanto perpendicolari alla stessa retta b . Da P si tracci il segmento di perpendicolare a d_2 e sia PP_2 . Il quadrilatero NPP_2G avendo gli angoli retti è un rettangolo e quindi $NG = PP_2 = d(P, d_2)$.

Consideriamo la retta sostegno di T e W , che interseca la retta b in E . Il punto E appartiene al piano π . Su π si tracci la retta perpendicolare alla retta b passante per E e sia d_1 . Tale retta d_1 è parallela a NP in quanto perpendicolari alla stessa retta b . Da P si tracci il segmento di perpendicolare a d_1 e sia PP_1 . Il quadrilatero NPP_1E avendo gli angoli retti è un rettangolo e quindi $NE = PP_1 = d(P, d_1)$.

Confrontiamo ora i segmenti PF_1 con NE e PF_2 con NG

Consideriamo i due triangoli scaleni NDB ed RGB , questi hanno

$$\angle DNB = \angle GRB \text{ perché opposti al vertice}$$

$$\angle BDN = \angle BRG \text{ perché alterni interni di } ES \parallel DH \text{ tagliate dalla retta generatrice } r$$

e quindi i triangoli NDB ed RGB sono simili. Consideriamo il triangolo $\Omega H_3 N$, dove Ω è il punto di intersezione della retta b con l'asse del cono, esso è rettangolo in H_3 , quindi il suo angolo $\Omega N H_3$ è un angolo acuto. Si consideri l'angolo $\angle DNB$ esso è supplementare di $\angle \Omega N H_3$ e pertanto risulta ottusangolo. Il triangolo $\angle DNB$ risulta ottusangolo, così pure il triangolo $\angle GBR$ ad esso simile. Per la disequaglianza triangolare $DB > BN$ e $BR > BG$. Sommando ambo i termini di due disequaglianze equiverse, si ottiene una disequaglianza equiversa a quelle. Si ha: $DB + BR > NB + BG$ che è lo stesso $DR > NG$ ma $DR = PI = PF_2$ ed $NG = PP_2 = d(P, d_2)$

Sostituendo si ha

$$PF_2 > d(P, d_2)$$

Con analogo ragionamento si dimostra che $PF_1 > d(P, d_1)$

In generale possiamo affermare indifferentemente che $PF > d(P, d)$. Dividendo ambo i termini di questa disuguaglianza per $d(P, d)$, si ottiene

$$\frac{PF}{d(P, d)} > 1$$

Posto $\frac{PF}{d(P, d)} = e$, con $e > 1$, si ha

$$\frac{PF}{d(P, d)} = e$$

Anche questa relazione introduce il concetto di luogo geometrico per i punti di Γ :

Def. 25) La sezione conica Γ è l'insieme dei punti del piano π tale che il rapporto delle loro distanze da un punto fisso F e da una retta fissa d sia una costante e maggiore di 1.

Si vuole verificare che anche questa relazione porta alla stessa equazione precedentemente trovata.

Posto $d(F, d) = p$, $FN = x$ e $PN = y$, applicando indifferentemente o al triangolo rettangolo PNF_1 (di conseguenza ad F e d impone il pedice 1) o al triangolo rettangolo PNF_2 (di conseguenza ad F e d impone il pedice 2) il teorema di Pitagora, si ha

30

$$PF = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad d(P, d) = x \pm p$$

Sostituendo in $\frac{PF}{d(P, d)} = e$, si ha

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x \pm p} = e$$

Operando algebricamente

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(x \pm p)$$

$$x^2 + y^2 = e^2(x \pm p)^2$$

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 \pm 2e^2px + e^2p^2$$

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 \pm 2e^2px + e^2p^2 = 0$$

Dividendo per $e^2 - 1$ ed ordinando, si ha

$$x^2 \pm \frac{2e^2p}{e^2 - 1}x + \frac{e^2p^2}{e^2 - 1} - \frac{y^2}{e^2 - 1} = 0$$

Aggiungendo e sottraendo $\frac{e^4p^2}{(e^2 - 1)^2}$, si ha

$$x^2 \pm \frac{2e^2p}{e^2 - 1}x + \frac{e^4p^2}{(e^2 - 1)^2} - \frac{e^4p^2}{(e^2 - 1)^2} + \frac{e^2p^2}{e^2 - 1} - \frac{y^2}{e^2 - 1} = 0$$

$$\left(x \pm \frac{e^2 p}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{e^4 p^2}{(e^2 - 1)^2} - \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}$$

$$\left(x \pm \frac{e^2 p}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}$$

Dividendo ambo i termini per $\frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}$, si ha

$$\frac{\left(x \pm \frac{e^2 p}{e^2 - 1}\right)^2}{\frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}} - \frac{\frac{y^2}{e^2 - 1}}{\frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}} = 1$$

Semplificando il secondo monomio,

$$\frac{\left(x \pm \frac{e^2 p}{e^2 - 1}\right)^2}{\frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}} = 1$$

Posto $X = x \pm \frac{e^2 p}{e^2 - 1}$, $Y = y$, $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}$ e $b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}$,

si ha

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Che è l'equazione dell'iperbole incontrata per altra via.

Troviamo ora una relazione che lega e ai parametri a, b, c

Si consideri il rapporto $\frac{b^2}{a^2}$ in funzione delle identità poste:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}}{\frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}} = e^2 - 1$$

da cui isolando la e^2 , si ha $e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1 = \frac{b^2 + a^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$

come nell'ellisse $e = \frac{c}{a}$. Andando a sostituire tale valore e semplificando in $b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}$ si ha

$$b^2 = \frac{c^2 p^2}{c^2 - a^2} = \frac{c^2 p^2}{b^2}$$

da cui $p^2 = \frac{b^4}{c^2}$: cioè $p = \frac{b^2}{c}$; moltiplicando ambo i termini per e si ha $e p = \frac{c}{a} \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{a}$

per cui $l = 2ep$.

Iperbole equilatera

Sia dato un cono circolare retto indefinito a due falde di vertice V , asse a e l'angolo di semiapertura misura 45° . Sia π un piano, che non passa per il vertice V del cono e che sia parallelo all'asse: cioè forma con esso l'angolo nullo.

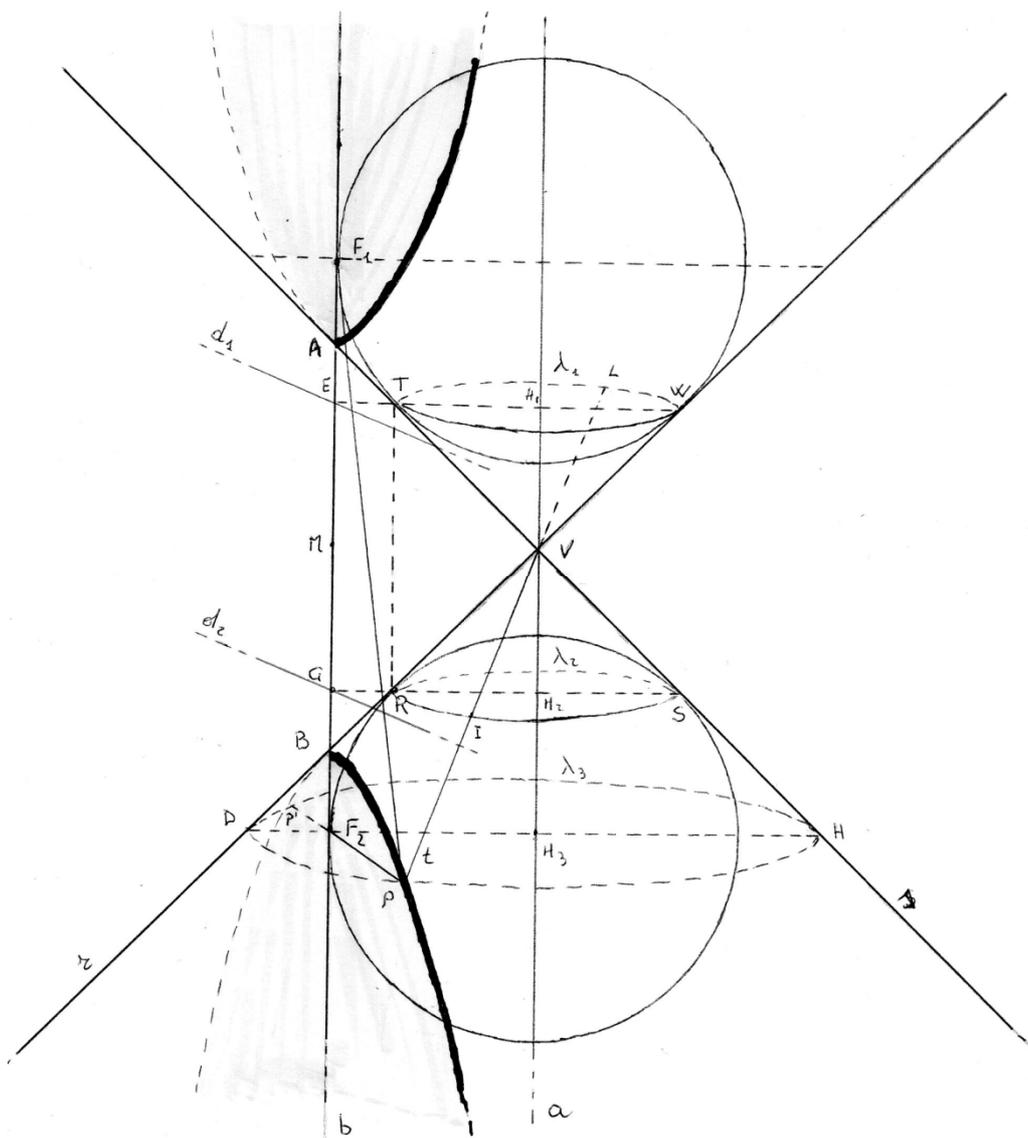


Fig. 10

Tale piano, dal corollario 2:1, interseca tutte le generatrici del cono, eccetto due il cui piano è parallelo al piano π ed sono perpendicolari tra di loro. L'insieme dei punti comuni al piano π e alle generatrici costituiscono la figura sezione conica Γ , costituita da due rami una in una falda e l'altra nell'altra. Per questa sezione valgono tutte le considerazioni fatte sull'iperbole, solo che la condizione che l'angolo di semiapertura è di 45° fa sì che alcuni punti coincidono e alcuni segmenti risultano congruenti in quanto lati di triangoli rettangoli congruenti; così pure sono congruenti le due sfere inscritte.

Tra i punti coincidenti di particolare importanza sono (osservando le figure) sono $N \equiv F_2$, tra i segmenti $AF_2 \equiv F_2H$ perché AF_2H triangolo rettangolo isoscele, così pure $BF_2 \equiv DF_2$. Pertanto ripercorrendo il ragionamento effettuato sull'iperbole normale possiamo concludere che posto

$BF_2 = x$ e $PF_2 = y$ e $F_2H = 2a + x$. Considerato che DPH è un triangolo rettangolo, perché inscritto in una semicirconferenza λ_3 , e che il piano π è tangente alla sfera e quindi perpendicolare al raggio F_2H_3 , il segmento PF_2 è l'altezza del triangolo DPH relativa all'ipotenusa. A tale triangolo possiamo applicare il II teorema di Euclide: $F_2P^2 = DF_2 \cdot F_2H$, che espressa in termini algebrici si ha

$$y^2 = x(2a + x)$$

Da cui moltiplicando, portando al primo membro e cambiando di segno si ha

$$x^2 - y^2 + 2ax = 0$$

Se ora riferiamo la figura anziché a B a M e operiamo una traslazione di vettore $\vec{v}(a; 0)$:

$$T_{v(a;0)} = \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow x - a \\ y \rightarrow y - b \end{cases}$$

Otteniamo $(x - a)^2 - y^2 + 2ax = 0$, da cui sviluppando i calcoli si ha l'equazione

$$x^2 - y^2 = a^2$$

che è l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi

Conclusione:

L'impostazione stereometrica della sezione conica *iperbole* permette di esprimere alcune considerazioni:

- La superficie conica indefinita (o il cono indefinito) ed il piano sezione, che interseca tutte le generatrici della superficie conica, devono essere prioritariamente assegnati e non sono soggette a modifiche durante la trattazione

Se uno di questi o entrambi variano, purché l'angolo fra asse del cono e piano sezione rimane minore dell'angolo di semiapertura del cono, non cambia la natura della sezione conica, ma cambiano le lunghezze dei segmenti costanti: cioè i valori dei parametri; e, di conseguenza cambiano i loro rapporti, ottenendo così diversi tipi di iperboli.

- Le proprietà dei punti della sezione conica sono emerse da considerazioni geometriche: infatti attraverso una serie di assiomi, di teoremi, di corollari e di definizioni ora di geometria piana ora di geometria solida si è riusciti a individuare e dimostrare relazione fra segmenti opportuni che determinano univocamente le proprietà di detti punti.
- Nelle relazioni si fa riferimento a grandezze variabili e a grandezze costanti o parametriche sempre di tipo assoluto: per i matematici greci le grandezze sono sempre segmenti o aree o rapporti di questi. Relativamente alla figura proposta all'inizio della trattazione sono
- 1) Nel primo metodo

variabili i segmenti AN o BN e PN
costanti i segmenti EW, SG, BG o AE, AB, MF, MB

2) Nel secondo metodo

variabili i segmenti BN o AN e PN
costanti i segmenti AB, MF, MQ

3) Nel terzo metodo

variabili i segmenti NF e PN
costanti i segmenti $F_1E = F_2G = d(F, d)$, MF

- La trasformazione delle relazioni geometriche nel linguaggio moderno di tipo algebrico con relativo bagaglio operativo è servito semplicemente a rendere più snello il calcolo e più chiari e semplici i risultati raggiunti. Tale trasformazione ha permesso di formalizzare in termini di equazioni o identità dette relazioni geometriche e di constatare che tutte e tre i metodi conducono allo stesso risultato.

Nella Storia della Matematica alcuni punti, alcune rette, alcuni segmenti incontrati nella trattazione hanno assunto nomi particolari in funzione del ruolo applicativo che i matematici hanno ritenuto attribuire ed usare nei loro scritti: così

- Il punto F è detto *fuoco*: di conseguenza l'iperbole ha due fuochi F_1 ed F_2
- Il punto M è detto *centro*.
- I punti A, B sono detti *vertici*
- La retta d è detta *direttrice*: di conseguenza l'iperbole ha due direttrici d_1 e d_2
- Il segmento AB è detto *asse principale o trasverso*
- Il segmento parallelo a QQ', passante per M, è detto *asse secondario*
- Il rapporto $e = \frac{MF}{MA}$ è detto *eccentricità*
- Le rette w e w' sono dette asintoti per l'iperbole.

6 Sintesi

L'analisi stereometrica sulle sezioni coniche ha permesso di individuare proprietà e relazioni geometriche che legano i punti di un piano e precisamente quelli del piano sezione π , così pure ha permesso di individuare punti, segmenti, rette e rapporti di segmenti caratteristici della sezione conica: tutte queste figure appartengono sempre al piano sezione π . Pertanto una volta trovata l'equazione risolvente tali relazioni geometriche, nulla vieta di interpretare quella equazione come l'equazione della sezione conica: il percorso fatto garantisce tale asserzione. Il tipo di equazione che si è trovata è

$$\text{Nel primo caso} \quad y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Nel secondo caso} \quad y^2 = lx \quad , \quad y^2 = 2px$$

$$\text{Nel terzo caso} \quad y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con la relazione di sintesi per tutte e tre le sezioni coniche

$$\frac{PF}{d(P, d)} = e$$

Con

nel primo caso $e < 1$, nel secondo caso $e = 1$ e nel terzo caso $e > 1$.

Come si nota l'equazione risolvente è un'equazione di secondo grado a due variabili, dove figurano dei parametri: variabili e parametri che hanno dei ruoli geometrici significativi in questo contesto. Il problema che si pone ora è “ Una equazione algebrica di secondo grado a due variabili in generale definisce una sezione conica, visto che algoritmi algebrici permettono di trasformarla in una delle tre forme scritte sopra ? “ La risposta a questo problema sarà oggetto del secondo capitolo con l'introduzione della *Geometria analitica* , dovuta al matematico e filosofo René Descartes (Cartesio 1596 – 1650) col contributo di Pierre De Fermat, François Viète e di altri insigni matematici.

Osservazione

La ricerca delle coniche mediante l'impostazione geometrico-euclidea con l'uso di un cono indefinito a due falde , poteva benissimo essere effettuata usando una sfera ed un piano π ad essa tangente. Infatti se da un punto V esterno alla sfera ed al piano π conduciamo una stella di rette tangenti alla sfera, queste intersecano il piano lungo una curva, che risulta

- a) Un'ellisse se la distanza tra piano e V : $d(V, \pi) > 2R$ (con R raggio della sfera) e se il piede della perpendicolare non cade nel punto di tangenza tra piano e sfera , (vedere figura 11)

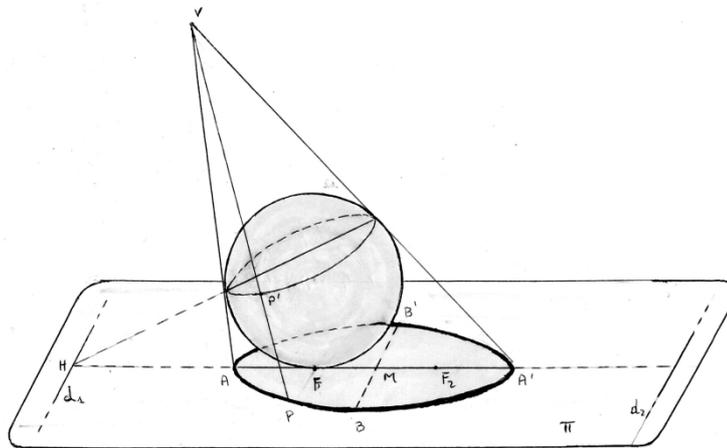


Fig. 11

- b) Una circonferenza se la distanza tra piano e $V : d(V, \pi) > 2R$ (con R raggio della sfera) e se il piede della perpendicolare cade nel punto di tangenza tra piano e sfera, (vedere figura 12)

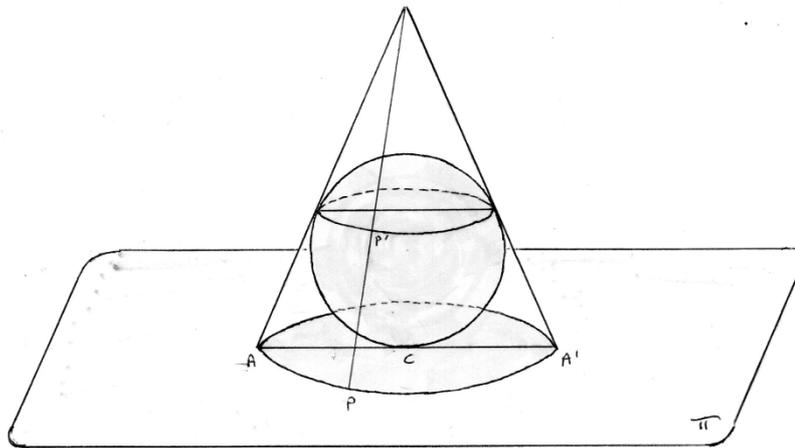


Fig. 12

- c) Una parabola se la distanza tra piano e $V : d(V, \pi) = 2R$ (con R raggio della sfera) e se il piede della perpendicolare non cade nel punto di tangenza tra piano e sfera, (vedere figura 13)

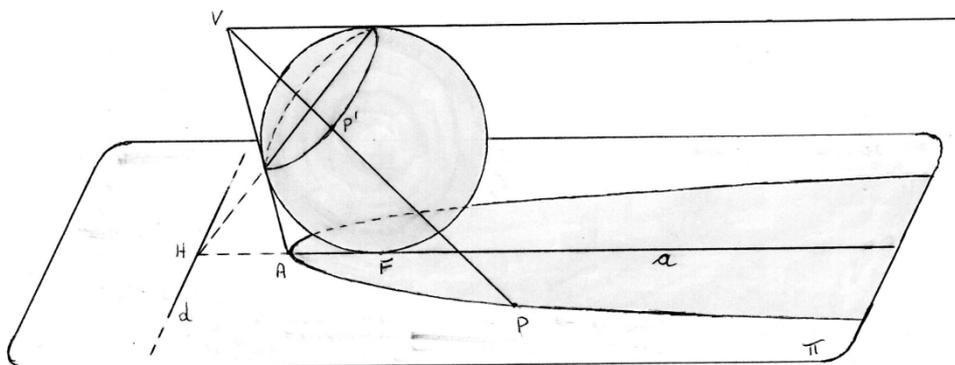


Fig. 13

- d) Un'iperbole se la distanza tra piano e $V : d(V, \pi) < 2R$ (con R raggio della sfera) e se il piede della perpendicolare non cade nel punto di tangenza tra piano e sfera, (vedere figura 14)

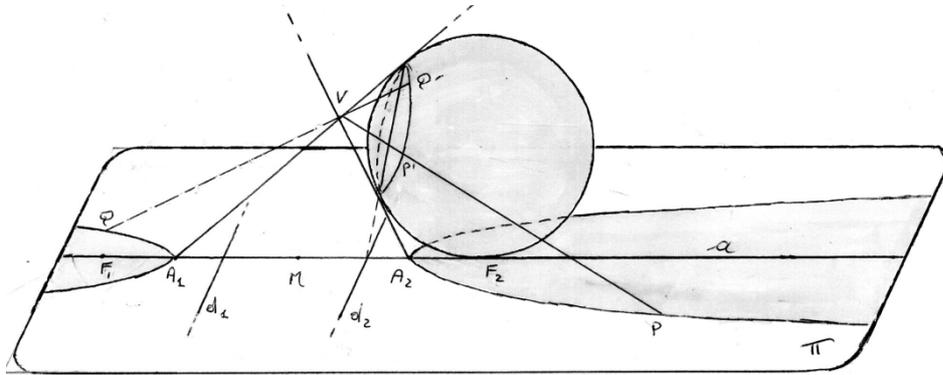


Fig. 14

La stella di rette tangenti alla sfera passante per il punto V determinano una superficie conica e la sfera costituisce la sfera inscritta, pertanto il ragionamento fatto precedentemente sul cono a due falde può essere esteso anche a questa situazione geometrica.

7 Appendice 1 : tre problemi di Euclide

Si è detto nel corso del capitolo che fu Apollonio di Perga nel suo trattato *Le Coniche* ha chiamato le tre sezioni coniche con gli appellativi di *Ellisse*, *Parabola* ed *Iperbole* e in quel tratto di scritto si è detto pure che tali parole erano già note in altri contesti della geometria greca: infatti nei problemi applicativi del secondo teorema di Euclide ci si imbatte spesso in relazioni simili alle relazioni incontrate.

Problema 1) Trovare un quadrato di area quella di un rettangolo *diminuita* (o *mancante*) dell'area di un secondo quadrato

Risoluzione

Sia $AB = l$ (fig. 15) il segmento assegnato e si consideri il rettangolo $ABCD$ con $BC = x$. Sul segmento AB a partire da B si determini il punto E tale che $BE = BC$ e si costruisca il quadrato $BEGC$ con G elemento di DC . Sia M il punto medio AB . Se tracci nel semipiano di origine la retta passante per A e B non contenente il rettangolo $ABCD$ una semicirconferenza di centro M e di diametro AB . Si tracci la retta passante per G ed E , essa interseca la semicirconferenza in H . Si consideri il triangolo AHB , essendo inscritto in una semicirconferenza, esso è rettangolo. Poiché GH è perpendicolare ad AF , GH costituisce l'altezza di AHB relativa all'ipotenusa. Applicando il II teorema di Euclide al triangolo AHB , si ha la relazione :

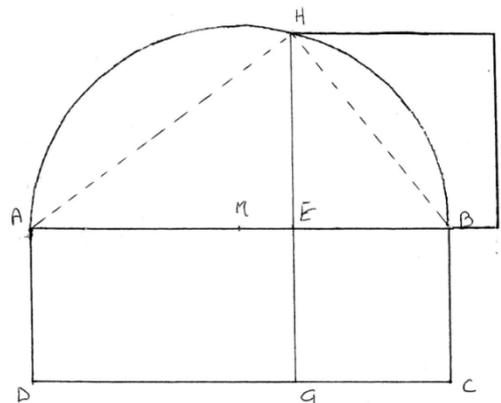


Fig. 15

$$EH^2 = AE \cdot BE = (AB - BE) \cdot EB = (AB - BC) \cdot BC = AB \cdot BC - BC^2$$

$$Q_{(EH)} = R_{(AB, BC)} - Q_{(BC)}$$

Il quadrato da cercare è $Q_{(EH)}$

Con scrittura dell'algebra moderna, posto $EH = y$, $BC = x$ ed $AB = l$ e sostituendo nella relazione si ha

$$y^2 = lx - x^2$$

Che manifestamente è simile all'equazione dell'ellisse nella prima versione

NB Nel testo del problema è scritta in corsivo la dicitura *diminuita* (o *mancante* che risulta una traduzione del vocabolo greco *ἐλλειψις*

Problema 2) Trovare un quadrato la cui area sia quella di un rettangolo *posto sopra* (o *confrontato con*) un segmento assegnato.

Risoluzione

Sia $AB = l$ (fig. 16) il segmento assegnato e si consideri il rettangolo ABCD con $BC = x$ Si prolunghi AB dalla parte di B di un segmento

$BE = BC$. Sia M il punto medio di AE. Si tracci nel semipiano di origine la retta passante per A e B, non contenente il rettangolo ABCD, una semicirconfenza di centro M e diametro AE. Si tracci la retta sostegno del segmento BC, essa interseca la semicirconfenza in H. Il triangolo AHE è rettangolo in H e BH è l'altezza di AHE relativa all'ipotenusa AE. Applicando al triangolo AHE il II teorema di Euclide, si ha:

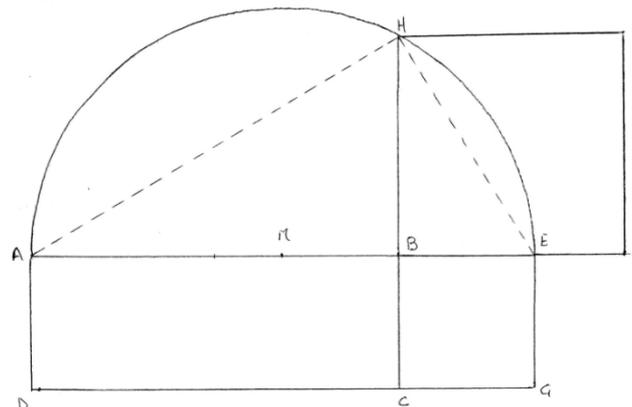


Fig. 16

$$BH^2 = AB \cdot BE = AB \cdot BC$$

$$Q_{(BH)} = R_{(AB, BC)}$$

Il quadrato da cercare è $Q_{(BH)}$

Con scrittura dell'algebra moderna, posto $BH = y$, $BC = x$ ed $AB = l$ e sostituendo nella relazione si ha

$$y^2 = lx$$

Che manifestamente è simile all'equazione della parabola nella prima versione

NB Nel testo del problema è scritta in corsivo la dicitura *posto sopra* (o *confrontato con*) che risulta una traduzione del vocabolo greco *παραβολή*

Problema 3) Trovare un quadrato la cui area *eccede* (o *va al di là*) quella di un rettangolo, posto su un segmento assegnato o di lato assegnato, di un secondo quadrato.

Risoluzione

Sia $AB = l$ (fig. 17) il segmento assegnato e si consideri il rettangolo ABCD con $BC = x$. Si prolunghi AB dalla parte di B di un segmento $BE = BC$ e si costruisca il quadrato BEGC e successivamente si prolunghi AE dalla parte di E di un segmento $EF = BC$. Sia M il punto medio AF. Si tracci nel semipiano di origine la retta per A e B non contenente il rettangolo ABCD una semicirconfenza di centro M e raggio $MA=MF$. Si tracci la retta passante per G ed E , essa interseca la

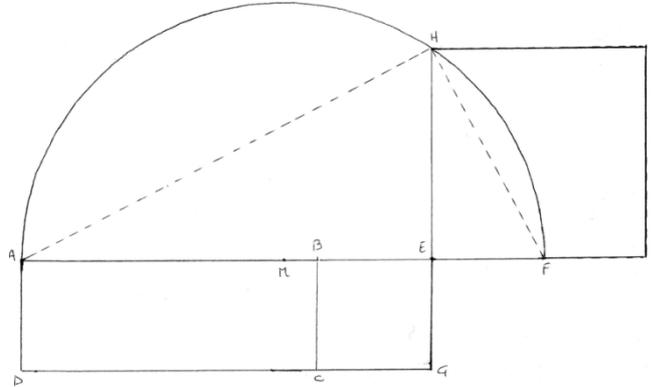


Fig. 17

semicirconfenza in H. Si consideri il triangolo AHF, essendo inscritto in una semicirconfenza, esso è rettangolo. Poiché GH è perpendicolare ad AF , GH costituisce l'altezza di AHF relativa all'ipotenusa. Applicando il II teorema di Euclide al triangolo AHF, si ha la relazione :

$$EH^2 = AE \cdot EF = (AB+BE) \cdot EF = (AB+BC) \cdot BC = AB \cdot BC + BC^2$$

$$Q_{(EH)} = R_{(AB, BC)} + Q_{(BC)}$$

Il quadrato da cercare è $Q_{(EH)}$

Con scrittura dell'algebra moderna, posto $EH = y$, $BC = x$ ed $AB = l$ e sostituendo nella relazione si ha

$$y^2 = lx + x^2$$

Che manifestamente è simile all'equazione dell'iperbole nella prima versione

NB Nel testo del problema è scritta in corsivo la dicitura *eccede* (o *va al di là*) che risulta una traduzione del vocabolo greco υπερβολή

Questi tre vocaboli: έλλειψις , παραβολή , υπερβολή, tradotti in tutte le lingue in modo cacofonico fanno parte ormai del bagaglio culturale nella matematica. In italiano li si indicano con *Ellisse, Parabola ed Iperbole*.

Questi vocaboli hanno soppiantato definitivamente la dicitura escogitata dai matematici prima di Apollonio: tale dicitura fa riferimento a semplice descrizione della maniera in cui sono state individuate tali curve. Bisogna sapere che le tre sezioni coniche venivano individuate dall'intersezione di un piano perpendicolare ad una generatrice di tre coni retti distinti :

- coni acutangoli e la sezione conica veniva chiamata *oxytome*
- coni retti e la sezione conica veniva chiamata *orthotome*
- coni ottusangoli e la sezione conica veniva chiamata *amblytome*

in questo contesto l' amblytome o iperbole è una curva non limitata sul piano sezione π costituita di un solo ramo. E' stato Apollonio a derivare tutte le sezioni coniche da un unico cono circolare obliquo a doppia falda, per costui non era l'angolo di apertura del cono che variava bensì l'angolo tra la retta fondamentale del cono e il piano sezione π : una conseguenza di ciò è l'introduzione di un secondo ramo alla sezione conica: iperbole; in quanto il piano sezione π interseca entrambe le falde del cono.

Appendice 2

Lettura (C.H.Boyer – Storia della matematica – Oscar Studio Mondadori)

La prima scoperta dell'ellisse sembra essere stata fatta da Menecno come risultato collaterale di un'indagine nella quale erano la parabola e l'iperbole che offrivano le proprietà richieste dalla soluzione del problema di Delo: la *duplicazione del cubo*. Partendo da un cono circolare retto e con angolo al vertice di 90° , Menecno trovò che, allorché il cono viene tagliato da un piano perpendicolare ad una generatrice, la curva intersezione è tale che, in termini di moderna geometria analitica, la sua equazione può venire scritta nella forma $y^2 = lx$, dove l è una costante dipendente dalla distanza del piano di intersezione dal vertice. Non sappiamo in che modo Menecno abbia derivato questa proprietà, ma essa dipende soltanto da teoremi di geometria elementare.

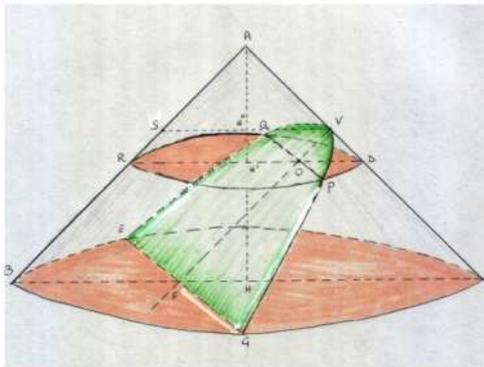


Fig. 18

Sia ABC (vedi figura 18) il cono retto rettangolo in A e sia segato da un piano π perpendicolare ad AC lungo la curva EVG. Sia P un punto della curva. Da P si tracci un piano γ parallelo alla base BC, che tagli il cono nel cerchio RPD e sia Q l'altro punto di intersezione della circonferenza con la curva EDG. Q risulta il simmetrico di P rispetto al diametro RD e pertanto PQ è perpendicolare ad RD in O. Il triangolo RPD è inscritto in una semicirconferenza e pertanto per esso vale il secondo teorema di Euclide: $PO^2 = RO \cdot OD$. Consideriamo ora i triangoli OVD ed ABC, questi sono simili per avere gli angoli congruenti, così pure sono simili SVA e ABC pertanto valgono le seguenti proporzioni fra i lati:

$$OD : BC = OV : AB \quad \text{e} \quad SV : BC = AV : AB.$$

Poichè VO è parallelo ad AB, il quadrilatero SVOR è un parallelogrammo, quindi $SV = RO$.

$$\text{Pertanto } PO^2 = RO \cdot OD = SV \cdot OD = \frac{BC \cdot AV}{AB} \cdot \frac{BC \cdot OV}{AB} = \frac{AV \cdot BC^2}{AB^2} \cdot OV$$

Quindi abbiamo la seguente relazione:

$$PO^2 = \frac{AV \cdot BC^2}{AB^2} \cdot OV$$

Posto $PO = y$, $OV = x$, $AV = p$, $\frac{BC^2}{AB^2} = 2$ e $l = 2p$ con scrittura di geometria analitica moderna,

abbiamo $y^2 = lx$ che è l'equazione della parabola

Se ora andiamo a considerare la sezione di un cono circolare retto acutangolo con un piano perpendicolare ad una generatrice (vedi figura 19)

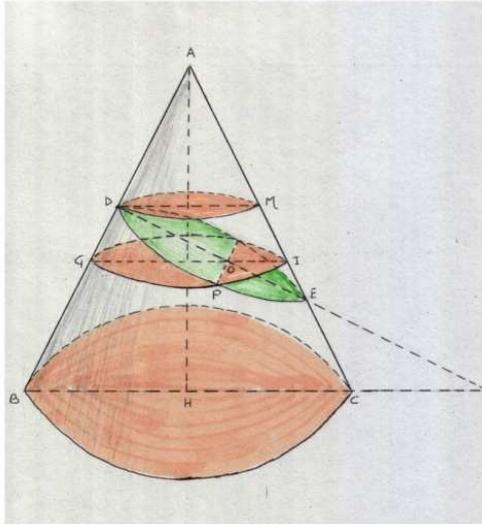


Fig. 19

Sia P un generico punto della curva sezione

Sia ABC (vedi figura 19) il cono retto acutangolo in A e sia segato da un piano π perpendicolare ad AB lungo la curva DPE. Sia P un punto della curva. Da P si tracci un piano γ parallelo alla base BC, che tagli il cono nel cerchio GPI e sia Q l'altro punto di intersezione della circonferenza con la curva DPE. Q risulta il simmetrico di P rispetto al diametro GI e pertanto PQ è perpendicolare ad GI in O. Il triangolo GPI è inscritto in una semicirconferenza e pertanto per esso vale il secondo teorema di Euclide: $PO^2 = GO \cdot OI$.

Consideriamo ora i triangoli DOG ed DBF, questi sono simili per avere gli angoli congruenti, così pure sono simili AHB e BDF pertanto valgono le seguenti proporzioni fra i lati:

$$OD : DF = GO : BF \quad \text{e} \quad AB : BF = AH : DF.$$

da cui $GO = \frac{OD \cdot BF}{DF}$ ed $\frac{BF}{DF} = \frac{AB}{AH}$

Consideriamo i triangoli DME ed IOE, questi sono simili per avere gli angoli congruenti, così pure sono simili ADM e ABC pertanto valgono le seguenti proporzioni fra i lati:

$$DM : OI = DE : OE \quad \text{e} \quad DM : BC = AD : AB$$

da cui $OI = \frac{DM \cdot OE}{DE}$ ed $DM = \frac{BC \cdot AD}{AB}$

Pertanto $PO^2 = GO \cdot OI$

Sostituendo in questa relazione otteniamo:

$$PO^2 = \frac{OD \cdot BF}{DF} \cdot \frac{DM \cdot OE}{DE} = \frac{AB \cdot DO \cdot BC \cdot AD \cdot OE}{AH \cdot AB \cdot DE} = \frac{BC \cdot AD}{AH \cdot DE} \cdot DO(DE - DO)$$

Posto $PO = y$, $DO = x$, $AD = p$, $DE = 2a$ e $\frac{BC}{AH} = k$ con scrittura di geometria analitica moderna,

abbiamo $y^2 = kpx - \frac{kp}{2a} x^2$ che è l'equazione dell'ellisse: posto $l = kp = \frac{2b^2}{a}$

Otteniamo l'equazione nella forma euclidea-archimedeica:

$$y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Pertanto la curva cercata è un'ellisse, secondo la nomenclatura di Apollonio, oppure oxytome secondo la nomenclatura di Euclide-Archimede.

Se ora andiamo a considerare la sezione di un cono circolare retto ottusangolo con un piano perpendicolare ad una generatrice (vedi figura 20)

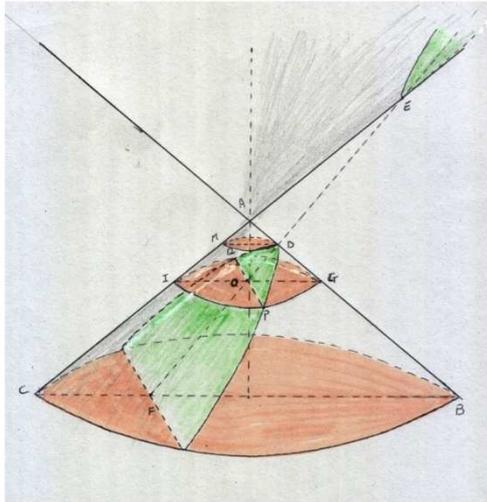


Fig. 20

Sia ABC (vedi figura 13) il cono retto ottusangolo in A e sia segato da un piano π perpendicolare ad AB lungo la curva DPE. Sia P un punto della curva. Da P si tracci un piano γ parallelo alla base BC, che tagli il cono nel cerchio GPI e sia Q l'altro punto di intersezione della circonferenza con la curva EDP. Q risulta il simmetrico di P rispetto al diametro GI e pertanto PQ è perpendicolare ad GI in O. Il triangolo GPI è inscritto in una semicirconferenza e pertanto per esso vale il secondo teorema di Euclide: $PO^2 = GO \cdot OI$.

Consideriamo ora i triangoli DOG ed DBF, questi sono simili per avere gli angoli congruenti, così pure sono simili AHB e BDF pertanto valgono le seguenti proporzioni fra i lati:

$$OD : DF = GO : BF \quad \text{e} \quad AB : BF = AH : DF.$$

$$\text{da cui } GO = \frac{OD \cdot BF}{DF} \quad \text{ed} \quad \frac{BF}{DF} = \frac{AB}{AH}$$

Consideriamo i triangoli DME ed IOE, questi sono simili per avere gli angoli congruenti, così pure sono simili ADM e ABC pertanto valgono le seguenti proporzioni fra i lati:

$$DM : OI = DE : OE \quad \text{e} \quad DM : BC = AD : AB$$

$$\text{da cui } OI = \frac{DM \cdot OE}{DE} \quad \text{ed} \quad DM = \frac{BC \cdot AD}{AB}$$

$$\text{Pertanto } PO^2 = GO \cdot OI$$

Sostituendo in questa relazione otteniamo :

$$PO^2 = \frac{OD \cdot BF}{DF} \cdot \frac{DM \cdot OE}{DE} = \frac{AB \cdot DO \cdot BC \cdot AD \cdot OE}{AH \cdot AB \cdot DE} = \frac{BC \cdot AD}{AH \cdot DE} \cdot DO(DE + DO)$$

Posto $PO = y$, $DO = x$, $AD = p$, $DE = 2a$ e $\frac{BC}{AH} = k$ con scrittura di geometria analitica moderna,

abbiamo $y^2 = kpx + \frac{kp}{2a} x^2$ che è l'equazione dell'iperbole: posto $l = kp = \frac{2b^2}{a}$

Otteniamo l'equazione nella forma euclidea-archimedeana:

$$y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Pertanto la curva cercata è un'iperbole (eccesso +), secondo la nomenclatura di Apollonio, oppure ambytome secondo la nomenclatura di Euclide-Archimede.

In tutte e tre i casi il parametro l dipende dalla distanza p del pino sezione dal vertice del cono, inoltre qualunque sia la posizione del cerchio base di diametro BC il rapporto di $\frac{BC}{AH}$ rimane costante ($= k$)

Appendice 3: duplicazione del cubo

La duplicazione del cubo consiste nel determinare lo spigolo di un cubo il cui volume sia doppio di quello di un cubo assegnato. Il primo a darne una spiegazione fu Ippocrate da Chio (sec. V a.C.) che con una dimostrazione di geometria piana trasformò il problema nei seguenti termini: inserire fra due segmenti assegnati di misura a e b due medie proporzionali c e d con l'uso delle proporzioni continue: $a : c = c : d = d : b$. Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni, Ippocrate ottiene la seguenti uguaglianza: $d^2 = cb$; applicando l'altra proprietà delle proporzioni ricava dalla prima proporzione $d = \frac{c^2}{a}$. Sostituisce questo valore nella prima uguaglianza e ottiene:

$$\frac{c^4}{a^2} = cb$$

Da cui $c^3 = a^2 b$. Posto $b = 2a$, ricava la relazione $c^3 = 2a^3$, pertanto Ippocrate afferma che il segmento c risolve il problema della duplicazione del cubo: Posto $a = 1$, la misura di $c = \sqrt[3]{2}$: valore difficilmente calcolabile con precisione, oggi sappiamo che è un numero aperiodico illimitato e quindi il segmento c non è possibile individuarlo con esattezza.

Sfruttando questa stessa impostazione Menecmo inserisce tra a e $b = 2a$ due incognite x ed y

$$a : x = x : y = y : 2a$$

e quindi sviluppa tre relazioni distinte: $a : x = x : y$; $x : y = y : 2a$ e $a : x = y : 2a$.

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ 2ax = y^2 \\ xy = 2a^2 \end{cases}$$

Posto $a = 1$, Menecmo traccia le tre curve : due parabole ed un'iperbole. Considerò il segmento di estremi i vertici comuni delle due parabole e l'altro estremo nel punto di intersezione delle tre curve, tale segmento costituisce lo spigolo del cubo di volume doppio rispetto al cubo di lato $a = 1$ risolvendo così graficamente il problema della duplicazione del cubo.

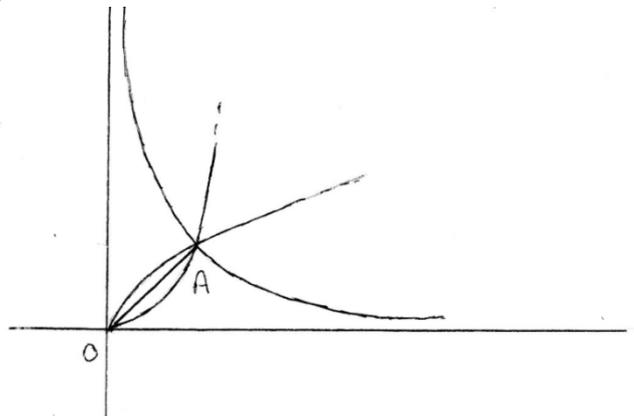


Fig. 21

CAPITOLO II

Elementi di GEOMETRIA ANALITICA , GONIOMETRIA E CONICHE

1 Introduzione

Nel primo capitolo si è affrontato l'origine della nozione di conica, come intersezione di una superficie conica indefinita con un piano non passante per il vertice del cono; con l'ausilio della geometria elementare od euclidea si è giunti a determinare relazioni fra i punti del piano sezione relativi alla figura intersezione. Successivamente attraverso l'ausilio del formalismo algebrico, sostituendo implicitamente (senza averlo dichiarato) ai segmenti presenti nelle relazioni trovate la misura della loro estensione, si è impostata l'equazione e si è affermata che tale equazione è l'equazione della curva in oggetto. Si è passato così inconsapevolmente dall'ambito geometrico all'ambito algebrico in modo naturale ma certamente improprio: infatti la geometria elementare tratta sì grandezze numeriche quando introduce il concetto di misura di segmenti, di aree di estensioni di figure piane e di volumi di estensioni di figure solide ma si tratta di grandezze numeriche assolute; mentre l'algebra tratta grandezze numeriche relative: positive e negative, e regole di calcolo operative fra queste: siano esse variabili o costanti. Pertanto quale struttura matematica permette quel supporto teorico-argomentativo che traduce le relazioni geometriche in relazioni analitiche od algebriche equivalenti e successivamente interpreta i risultati analitici od algebrici in termini geometrici? Tale struttura, oggetto di questo capitolo, è la *Geometria Analitica*, che è quel complesso di procedimenti e metodi che permettono di trattare questioni geometriche per mezzo delle coordinate con metodi analitici od algebrici. Il metodo della Geometria Analitica consiste nel tradurre l'enunciato geometrico: nel caso delle sezioni coniche l'enunciato consiste nella proprietà geometrica che definisce la conica come luogo geometrico, in un enunciato analitico o algebrico: nel caso delle sezioni coniche l'enunciato analitico è un'equazione di secondo grado a due incognite. Questa traduzione viene effettuata stabilendo a priori su un piano un sistema di coordinate monometrico ortogonale; successivamente viene determinato l'insieme dei punti del piano che soddisfano l'enunciato analitico: cioè l'equazione; ed, infine si traccia il grafico: cioè la curva o figura geometrica.

L'avvento della Geometria Analitica, dovuta al contributo di tre grandi matematici del XVII° secolo Descartes, Viète e Fermat, fece perdere la distinzione, dovuta ai matematici greci, delle curve in tre categorie. La prima, nota come quella dei *luoghi piani*, era formata da tutte le rette e da tutte le circonferenze; la seconda, nota come quella dei *luoghi solidi*, era formata da tutte le sezioni coniche; la terza categoria, nota come quella dei *luoghi lineari*, comprendeva indistintamente tutte le altre curve: per esempio la Quadratrice di Ippia (V sec. A.C.), la Concoide di Nicomede (II sec. A.C.), la Cissoide di Diocle (II – I sec. a.C.), ecc. Così pure l'avvento della Geometria Analitica ha permesso non solo che le equazioni (prima del XVII sec. espresse retoricamente da relazioni fra figure) sono determinate da curve ma anche che le curve sono definite da equazioni: di qui il mutamento dell'approccio allo studio delle coniche ed in generale delle curve, che da quel momento sono state introdotte in modo numeroso. Oggi la Geometria Analitica ci permette di studiare qualsiasi tipo di curva: luogo geometrico.

Premesse

Nello studio della Geometria Razionale ci si è incontrati a studiare le proprietà della retta, tra queste è fondamentale il postulato di continuità di Dedekind:

Postulato 1): *Se una ripartizione di tutti i punti della retta in due insiemi è tale che ogni punto di uno degli insiemi sta a sinistra di ogni punto dell'altro, allora esiste un punto ed uno solo dal quale questa ripartizione di tutti i punti in due insiemi, o questa decomposizione della retta in due parti, è prodotta.*

Nello studio dell'Algebra ci si è incontrati a studiare le proprietà dei numeri reali, una volta definiti come elemento separatore fra due classi contigue di numeri razionali. Tra queste proprietà è fondamentale il teorema di continuità dei numeri reali:

Teorema 1) *Siano A e B due classi contigue di numeri reali. Esiste uno ed un solo numero reale k , tale che sia $k_1 \leq k \leq k_2$ per qualunque $k_1 \in A$ e qualunque $k_2 \in B$. Tale numero reale k si chiama elemento separatore delle classi A e B .*

I due enti :l'ente geometrico *retta* e l'ente algebrico *l'insieme dei numeri reali* presentano una analoga proprietà: la continuità, cioè il susseguirsi dei punti nell'una e dei numeri reali nell'altro avviene per continuità, pertanto è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta ed i numeri reali.

Relazione di ascissa ed ascissa di un punto su una retta orientata.

Dai postulati di appartenenza e da quelli dell'ordine sulla retta si può affermare che i punti della retta si possono ordinare secondo due versi, detti *versi di percorrenza*, uno opposto all'altro.

Def. 1) **Una retta si dice orientata quando su di essa è fissato un verso di percorrenza.**

Il verso fissato sulla retta orientata, indicato con una freccia, è detto convenzionalmente positivo; mentre il verso contrario è detto negativo. Sia AB un segmento di una retta orientata, se A precede B nel verso di percorrenza scelto sulla retta allora si dice che AB è concorde con l'orientazione della retta: nel caso che AB è concorde si dice che AB è positivo, altrimenti AB è negativo.

In geometria euclidea sono trattati i concetti di estensione e di misura. Ricordiamo che misurare un segmento significa confrontarlo con un altro segmento preso come campione o unità e che il rapporto tra il segmento ed il segmento unità si chiama misura assoluta del segmento ed è un numero reale positivo; se si vuole tenere conto dell'orientamento del segmento da misurare allora la misura del segmento, rispetto al segmento orientato unitario preso sempre positivo, è un numero reale relativo, cioè un numero positivo o negativo a secondo che il verso del segmento considerato sia concorde o discorde col verso scelto sulla retta, dove giace il segmento.

Considerata una retta orientata r , fissato un punto O su di essa, per il postulato di Dedekind il punto O divide la retta r in due parti: una costituita da punti successivi ad O nel verso positivo e l'altra costituita da punti che precedono O nel verso negativo. Fissata un'unità di misura u e preso un punto A della retta orientata r , sia α il numero reale relativo che esprime il rapporto tra il segmento orientato OA e l'unità u : $\alpha > 0$ se A segue O , $\alpha = 0$ se A coincide con O , $\alpha < 0$ se A precede O . In questo contesto logico il numero reale α è detto *ascissa* del punto A . In questo modo al punto A di

r viene associato o fatto corrispondere un determinato numero reale relativo; il procedimento fatto su A è possibile estenderlo a tutti i punti della retta orientata r . Pertanto la relazione di ascissa permette di porre in corrispondenza biunivoca i punti della retta orientata con i numeri reali: cioè ad ogni punto della retta viene associato un numero reale e fissato un qualsiasi numero reale esiste un ben determinato segmento orientato che ha come primo estremo fisso O e secondo estremo il punto da far corrispondere. La relazione di ascissa è il procedimento che permette di determinare il numero reale da associare al punto della retta, mentre l'ascissa del punto è il numero reale, che esprime la misura del segmento orientato di estremi l'origine O ed il punto in considerazione.

Pertanto quando si fissa su una retta un punto O come origine, un verso di percorrenza positivo ed un'unità di misura, si dice che si è fissato sulla retta un sistema di ascisse: si stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali.

La retta dove è fissato un sistema di ascisse è chiamata *asse delle ascisse* o retta reale, l'ascissa del punto è detta pure *coordinata del punto*: gli elementi della retta reale si indicano con $A(\alpha)$: cioè il punto della retta orientata e il numero reale che ne esprime l'ascissa.

Coordinate cartesiane e sistema cartesiano nel piano.

Si dimostra in geometria euclidea, come conseguenza del postulato delle parallele, il

Teorema 2 : Due rette parallele a due rette incidenti dello stesso piano sono incidenti.

Da tale teorema ne deriva il seguente

Corollario : Se dagli estremi di due segmenti, aventi in comune un punto, si tracciano due rette, parallele ai due segmenti, allora tali rette si intersecano in uno ed un solo punto .

Sfruttando questo teorema ed il suo corollario consideriamo nel piano due rette reali x ed y , aventi un punto in comune O , ed un punto A . Se da A si tracciano due rette parallele rispettivamente ad y e ad x , queste intersecano la retta reale x in un punto A_x e la retta reale y in A_y . Il quadrilatero OA_xAA_y avendo i lati a due a due paralleli è un parallelogrammo pertanto il punto A è univocamente determinato. Poiché O è fisso, in quanto intersezione delle rette x ed y , al variare di A sul piano variano A_x sulla retta x e A_y sulla retta y .

Il punto A in questo contesto è univocamente determinato, una volta fissate le rette x ed y , da A_x ed A_y ; questi punti sono punti di rette reali, pertanto ad essi è associato un numero reale od ascissa: ad $A_x \rightarrow \alpha$ e ad $A_y \rightarrow \beta$.

In sintesi per affermare che A è determinato da α e β si scrive $A(\alpha; \beta)$.

Convenzionalmente la retta reale x viene assunta come retta base o fondamentale e viene chiamata *asse delle ascisse* (conservando di fatto il suo nome originario), mentre la retta reale y è subordinata alla x e viene chiamata *asse delle ordinate*. In questo modo ad un punto del piano corrisponde una coppia ordinata di numeri reali. Viceversa, data una coppia ordinata di numeri reali $(\alpha; \beta)$, si fissino sull'asse delle ascisse il punto A_x di ascissa α e sull'asse delle ordinate il punto A_y di ordinata β ; conducendo da A_x e da A_y le rette parallele rispettivamente ad y e ad x per il

teorema precedentemente dimostrato, è univocamente determinato il punto A intersezione delle rette parallele tracciate.

Questo procedimento stabilisce una *corrispondenza biunivoca* tra punti del piano e coppia ordinata di numeri reali una volta fissata la coppia di rette reali che si intersecano, tali rette costituiscono un *sistema di riferimento cartesiano*.

Le rette x ed y possono essere oblique o perpendicolari, il verso di percorrenza positivo può essere fissato indifferentemente, il punto di intersezione O è univoco ed è detto origine del sistema, l'unità di misura sulle due rette può essere la stessa oppure differente. Tuttavia convenzionalmente le rette x ed y si assumono perpendicolari con l'asse delle ascisse x parallelo al piano d'orizzonte, così pure si assume sulla retta reale x il verso di percorrenza positivo quello che va da sinistra verso destra, mentre sull'asse delle ordinate quello che va dal basso verso l'alto. Nel corso della trattazione, a meno che non si indichi diversamente,

- le rette reali x ed y si assumono perpendicolari
- Il verso di percorrenza sull'asse delle ascisse x si assume da sinistra verso destra, mentre quello sull'asse delle ordinate dal basso verso l'alto
- L'unità di misura sui due assi è la stessa

Con queste condizioni si dice che sul piano è stato fissato un **sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale**. Il punto A del piano in questo riferimento è univocamente determinato dalla coppia $(\alpha; \beta)$ di numeri reali: i due numeri si dicono **coordinate** (*cartesiane ortogonali*), la prima componente della coppia si dice *ascissa*, la seconda componente si dice *ordinata*.

Prerequisiti di geometria analitica allo studio delle coniche

a) Distanza euclidea :

Data una retta reale la *distanza fra due suoi punti* è uguale al valore assoluto della differenza tra le ascisse dei due punti: tale distanza si dice distanza euclidea.

Se $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, allora $AB = d(A; B) = |\alpha - \beta|$

Tale distanza gode di queste proprietà:

- 1) $d(A; B) \geq 0$
- 2) $d(A; B) = d(B; A)$
- 3) Se $C \in AB$, allora $d(A; C) + d(C; B) = d(A; B)$

b) Ascissa del punto medio del segmento AB .

Se $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, allora $M_{AB} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

c) Distanza tra due punti del piano

Fissato sul piano un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale xOy e presi due suoi punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$,

- 1) se A e B appartengono ad una retta parallela all'asse delle ascisse x , allora

$$d(A; B) = |x_A - x_B|$$
- 2) se A e B appartengono ad una retta parallela all'asse delle ordinate y , allora

$$d(A; B) = |y_A - y_B|$$

3) altrimenti

$$d(A; B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

d) *Coordinate del punto medio del segmento AB.*

Siano $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ le coordinate del punto medio sono $M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

e) *Equazione del luogo geometrico piano*

Nel primo capitolo si è definito per via geometrica il concetto di luogo geometrico piano: cioè l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una determinata proprietà; in questo capitolo l'introduzione della corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti del piano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali permette di tradurre ogni proprietà caratteristica dei punti di un luogo in una relazione algebrica od analitica tra l'ascissa e l'ordinata dei punti, cioè in una equazione del tipo $F(x; y) = 0$, dove F rappresenta un numero finito di operazioni matematiche sulle variabili x ed y . In questo contesto il metodo algebrico od analitico permette di caratterizzare il luogo geometrico mediante un'equazione del tipo $F(x; y) = 0$. Se con Γ si indica il luogo geometrico, allora in geometria analitica $\Gamma = \{P(x; y) | F(x; y) = 0\}$: cioè l'insieme dei punti P del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione del luogo.

Teorema 3): “ Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto appartenga ad un luogo, è che le sue coordinate soddisfino l'equazione del luogo.”

Questo teorema permette di tracciare sul piano cartesiano la *curva rappresentativa* (o *rappresentazione grafica*) dell'equazione: cioè la figura geometria del luogo, costituito da infiniti punti che costituiscono le infinite soluzioni dell'equazione indeterminata $F(x; y) = 0$.

Si è detto precedentemente che la F indica l'insieme delle operazioni matematiche sulle variabili x ed y , pertanto se il tipo di operazioni sono esclusivamente di tipo algebrico : cioè addizione, sottrazioni, moltiplicazioni , potenze, divisioni ed estrazioni di radici, allora l'equazione è algebrica e la curva è algebrica; altrimenti l'equazione è trascendente , così pure la curva è trascendente. Tutte le equazioni algebriche a due variabili sono equazioni polinomiali a due variabili. Proprietà tipica dei polinomi è il grado assoluto, che caratterizza il grado dell'equazione e quindi l'ordine della curva. In fatti la retta è una curva algebrica del primo ordine in quanto la sua equazione presenta un polinomio di primo grado in x ed y : $ax + by + c = 0$ con $a \neq 0 \vee b \neq 0$; mentre la conica è una curva algebrica, come si vedrà, del secondo ordine in quanto la sua equazione presenta un polinomio di secondo grado in x ed y : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

f) *Richiami sulla retta*

A) Equazione generale della retta in forma implicita: $ax + by + c = 0$,

-) Se $a \neq 0$ e $b = c = 0$, l'equazione è quella dell'asse delle ordinate $x = 0$
-) Se $b \neq 0$ e $a = c = 0$, l'equazione è quella dell'asse delle ascisse $y = 0$
-) Se $a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$, l'equazione è quella di una retta parallela all'asse delle ordinate
-) Se $b \neq 0$, $a = 0$ e $c \neq 0$, l'equazione è quella di una retta parallela all'asse delle ascisse
-) Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$, l'equazione è una retta passante per l'origine degli assi

-) Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. l'equazione è di una retta generica del piano

B) Posto $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, l'equazione generale della retta in forma esplicita è $y = mx + q$

-) Se $m = q = 0$, l'equazione è quella dell'asse delle ascisse $y = 0$

-) Se $q \neq 0$ e $m = 0$, l'equazione è quella di una retta parallela all'asse delle ascisse

-) Se $m \neq 0$ e $q = 0$, l'equazione è una retta passante per l'origine degli assi

-) Se $m \neq 0$ e $q \neq 0$. l'equazione è di una retta generica del piano

C) Condizione di parallelismo di due rette

-) in forma implicita $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; in forma esplicita $m = m'$

D) Condizione di perpendicolarità di due rette

-) in forma implicita $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$; in forma esplicita $m \cdot m' = -1$

E) Fascio di rette di centro $P(x_p; y_p)$

-) in forma implicita $a(x - x_p) + b(y - y_p) = 0$

-) in forma esplicita $y - y_p = m(x - x_p)$

F) Distanza di un punto $P(x_p; y_p)$ da una retta:

-) in forma implicita $d(P; r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

-) in forma esplicita $d(P; r) = \frac{|y_p - (mx + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$

Si da per acquisito che le formule enunciate da A) ad F) siano note al lettore e che le sappia dimostrare.

2 CONICHE CANONICHE

Generalità: Nel I capitolo si è affrontato la ricerca di quelle relazioni geometriche che definiscono le sezioni coniche come luoghi geometrici piani, successivamente attraverso il formalismo dell'algebra moderna si è giunti per tutti i tipi di coniche ad una equazione di secondo grado a due variabili.

Data ora un'equazione completa di secondo grado a due variabili, applicando i metodi della geometria analitica, si vuole verificare che tale equazione definisce una conica. Sia

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Si dimostrerà nel capitolo sulle trasformazioni del piano in sé e successivamente nel capitolo sulle matrici che tale equazione è possibile trasformarla nelle sole forme

-) $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ nel caso si tratti di ellisse o iperbole, dette coniche a centro

-) $Ax^2 + Ey = 0$ o $Cy^2 + Dx = 0$ nel caso si tratti di parabola.

Tali forme non sono altro che le equazioni trovate per via geometrica dei diversi tipi di conica: a tali forme si dà il nome di equazioni canoniche delle coniche. Si determini ora per ogni tipo di conica

l'equazione canonica per via analitica. Si stabilisca sul piano un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale xOy e sia $P(x; y)$ un generico punto di detto piano e si trasformino le proprietà geometriche dei punti dei diversi luoghi, che definiscono i vari tipi di coniche, in relazioni algebriche.

Ellisse

Def.1) Si chiama ellisse il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi F_1 ed F_2 (detti fuochi) sia costante.

Siano F_1 ed F_2 i due punti fissi e sia $2c$ (con $c > 0$) il valore della loro distanza: $d(F_1; F_2) = 2c$. Sia $2a$ (con $a > 0$) il valore della somma costante delle distanze di un generico punto P da F_1 ed F_2

$$d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a$$

Si assuma come asse delle ascisse x la retta sostegno dei punti F_1 ed F_2 e come asse delle ordinate y la retta perpendicolare alla retta x nel punto medio O del segmento F_1F_2 . Il punto O , essendo il punto di intersezione degli assi di riferimento è l'origine del sistema. Si ponga per convenzione che sull'asse delle x il punto F_1 precede il punto O e che F_2 segue O , pertanto il segmento OF_1 è negativo ed OF_2 è positivo, essendo O punto medio F_1 ed F_2 sono equidistanti da O . Nel sistema

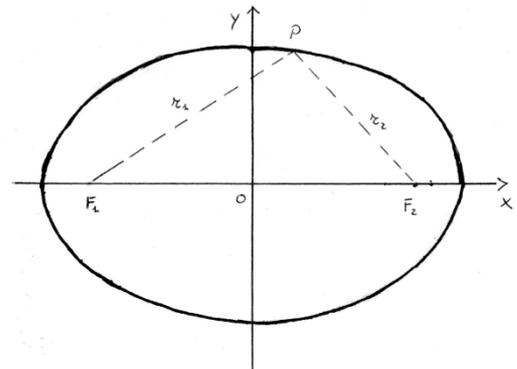


Fig. 1

di riferimento costruito le coordinate dei due punti sono $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$; se le coordinate del generico punto sono $P(x, y)$, applicando la distanza di due punti si ha:

$$d(P; F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d(P; F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

sostituendo nella relazione del luogo si ha

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Tenendo presente i passaggi algebrici effettuati nel primo capitolo si giunge all'equazione

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con la condizione che $a^2 - c^2 = b^2$, con $a > c$ per la disequaglianza triangolare applicata al triangolo F_1PF_2 : ogni lato è minore della somma degli altri due $2a > 2c$.

Tale equazione si chiama *equazione canonica dell'ellisse*.

Si vuole verificare che dato un punto $P (x_p ; y_p)$ del primo quadrante del piano cartesiano precedentemente determinato, che soddisfa l'equazione 1) con la condizione $a^2 - c^2 = b^2$ la relazione

$$d (P ; F_1) + d (P ; F_2) = 2a$$

è soddisfatta.

Perché P soddisfi l'equazione 1) le sue coordinate sono $P (x_p ; \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_p^2})$. Si calcolino le distanze di P da F_1 e da F_2 :

$$\begin{aligned} d (P ; F_1) &= \sqrt{(x_p + c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_p^2)} = \sqrt{x_p^2 + 2cx_p + c^2 + a^2 - c^2 - x_p^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \\ &= \sqrt{2cx_p + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x_p\right)^2} = a + \frac{c}{a}x_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d (P ; F_2) &= \sqrt{(x_p - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_p^2)} = \sqrt{x_p^2 - 2cx_p + c^2 + a^2 - c^2 - x_p^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \\ &= \sqrt{-2cx_p + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x_p\right)^2} = a - \frac{c}{a}x_p \end{aligned}$$

Sommando le due distanze

$$d (P ; F_1) + d (P ; F_2) = a + \frac{c}{a}x_p + a - \frac{c}{a}x_p = 2a$$

$$d (P ; F_1) + d (P ; F_2) = 2a$$

NB. Si è preso un punto del primo quadrante per non tener conto del segno nell'estrazione di radice, comunque qualunque punto del piano cartesiano si prenda nella composizione dei segni si giunge sempre allo stesso risultato. Pertanto qualunque sia il punto P soddisfacente l'equazione 1) vale la relazione $d (P ; F_1) + d (P ; F_2) = 2a$.

L'equazione 1) è stata trovata partendo dalla proprietà geometrica dei punti del piano, col metodo analitico si è determinato un sistema di riferimento cartesiano, si sono determinati le coordinate dei punti fissi e successivamente si sono applicate le regole della geometria analitica e dell'algebra. Una volta trovata l'equazione si è partiti da tale equazione e si è scelto un punto arbitrario, le cui coordinate soddisfano l'equazione stessa; e, si è verificato attraverso regole algebriche che vale la relazione geometrica iniziale. Pertanto il luogo geometrico definisce l'equazione e l'equazione definisce il luogo geometrico. Dunque luogo geometrico: l'ellisse, ed equazione sono due modi diversi di studiare l'ellisse.

Analisi dell'equazione 1) e ruolo dei parametri

Ricavando dall'equazione 1) , detta forma implicita, le due forme esplicite: una relativa alla variabile y e l'altra rispetto alla variabile x , si ha

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Imponendo le condizioni di esistenza dei radicali, si ottengono le seguenti condizioni di variabilità rispettivamente della x e della y :

$$-a \leq x \leq a \quad \text{e} \quad -b \leq y \leq b$$

Considerato che $x = \pm a$ sono due rette parallele e simmetriche all'asse delle ordinate; e, che $y = \pm b$ sono due rette parallele e simmetriche rispetto all'asse delle ascisse, ne deriva che l'ellisse risulta una curva chiusa al finito ed è tutta compresa nel rettangolo individuato dalle suddette parallele agli assi. Se ora si interseca l'ellisse con l'asse delle ascisse: cioè si mettono a sistema l'equazione 1) con l'equazione dell'asse delle ascisse

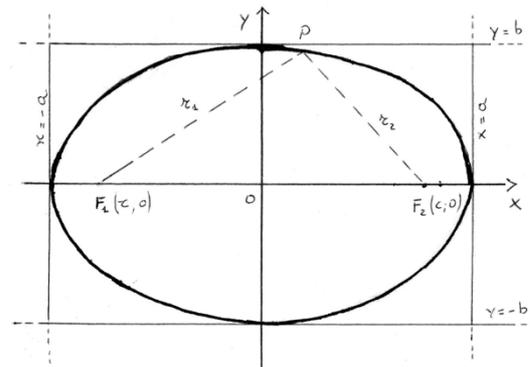


Fig.2

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si hanno i punti di intersezione di coordinate $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$

Se ora si interseca l'ellisse con l'asse delle ordinate: cioè si mettono a sistema l'equazione 1) con l'equazione dell'asse delle ordinate

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Si hanno i punti di intersezione di coordinate $B_1(-b; 0)$ e $B_2(b; 0)$. Dalla condizione

$a^2 - b^2 = c^2$, deriva che non solo è a maggiore di c , ma è anche maggiore di b , il segmento A_1A_2 costituisce l'asse maggiore dell'ellisse e vale $2a$, mentre B_1B_2 è l'asse minore dell'ellisse e vale $2b$, pertanto il parametro a misura il semiasse maggiore, il parametro b il semiasse minore dell'ellisse e dall'impostazione dei punti F_1 ed F_2 , detti fuochi, deriva che il parametro c misura la semidistanza focale.

*) Nel primo capitolo si è definita l'ellisse come il luogo dei punti del piano tale che il rapporto tra la distanza da un punto fisso e da una retta fissa è minore di 1: cioè

$$\frac{d(P; F)}{d(P; r)} = e \quad (\text{con } e < 1)$$

Fissato sul piano un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale sia P un generico punto di tale piano di coordinate $(x; y)$ e sia F $(-c; 0)$ il punto fisso e la retta r , relativa ad F, di

equazione $x = -\frac{a^2}{c}$. Si calcolino la $d(P, F) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $d(P, r) = \left| \frac{cx+a^2}{c} \right|$

posto $e = \frac{c}{a}$ e sostituendo i valori nella relazione $\frac{d(P;F)}{d(P;r)} = e$ si ricava

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\left| \frac{cx+a^2}{c} \right|} = \frac{c}{a}$$

Operando algebricamente si ha

$$\begin{aligned} a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= |cx+a^2| \\ a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Dividendo ambo i termini per $a^2(a^2 - c^2)$ e semplificando e posto $a^2 - c^2 = b^2$ si ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Che risulta ancora l'equazione canonica dell'ellisse.

L'ellisse, presentando nella sua equazione le variabili al quadrato (come si avrà modo di dimostrare nel capitolo delle trasformazioni), è una curva simmetrica rispetto agli assi e all'origine del sistema di riferimento. Tale origine costituisce il centro dell'ellisse.

Punti, segmenti e rette notevoli dell'ellisse:

Il punto O $(0; 0)$ è il centro, così pure centro di simmetria

I punti $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$ sono i fuochi

I punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ sono i vertici

I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 di misura rispettivamente $2a$ e $2b$ sono l'asse maggiore e l'asse minore: segmenti che appartengono alle rette $x = 0$ e $y = 0$

CIRCONFERENZA

Def. La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è costante e tale costante è detta raggio.

La circonferenza è un caso particolare dell'ellisse, quando i semiassi sono uguali o, che è lo stesso, i fuochi coincidono con l'origine del sistema. Posto $a = b = r$ raggio della circonferenza e $c = 0$ e sostituendo nell'equazione canonica dell'ellisse, si ha l'equazione canonica della circonferenza:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

con raggio r e centro O $(0; 0)$.

PARABOLA

Def. La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso **F** (detto fuoco) e da una retta fissa **d** (detta direttrice)

$$d(P; F) = d(P; d) \quad (\text{dove } P \text{ è un generico punto del piano})$$

Sia $2p$ (con $p > 0$) il valore della distanza: $d(F; d) = 2p$.

Si assuma come asse delle ordinate y la retta perpendicolare alla direttrice d e passante per il fuoco F e come asse delle ascisse x la retta perpendicolare alla retta y nel punto O equidistante da F e da d . Il punto O , essendo il punto di intersezione degli assi di riferimento è l'origine del sistema.

Si ponga per convenzione che il punto H di intersezione tra la direttrice d e l'asse delle y precede il punto O e che F segue O , pertanto il segmento OH è negativo ed OF è positivo, essendo O punto medio H ed F sono equidistanti da O . Nel sistema di riferimento costruito le coordinate del fuoco

sono $F(0; p)$ e l'equazione della direttrice è $y + p = 0$; se le coordinate del generico punto sono $P(x, y)$, applicando la distanza di due punti e la distanza punto retta nella forma implicita, si ha che

$$d(P; F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \quad \text{e} \quad d(P; d) = |y + p|$$

Sostituendo nella relazione $d(P; F) = d(P; d)$, si ha

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Operando algebricamente

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \end{aligned}$$

eliminando e trasportando si ha

$$x^2 = 4py$$

dividendo ambo i termini per $4p$, si ha

$$y = \frac{1}{4p} x^2$$

posto $a = \frac{1}{4p}$ e sostituendo, si ottiene l'equazione canonica della parabola

$$2) \quad y = a x^2$$

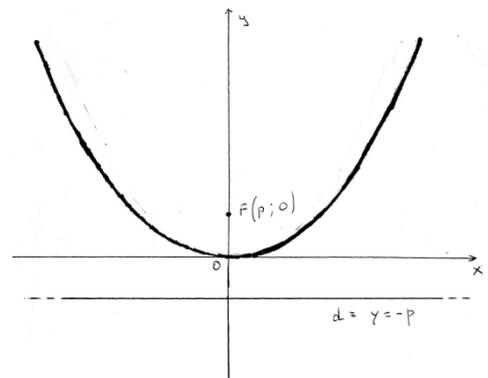


Fig. 3

Come per l'ellisse anche qui si dimostra che dato un punto del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano l'equazione $y = a x^2$ con la condizione $a = \frac{1}{4p}$, allora il punto soddisfa il luogo geometrico $d(P; F) = d(P; d)$. Infatti se le coordinate di $P(x_p; y_p)$ soddisfano l'equazione vuol dire che $y_p = a x_p^2$ quindi le coordinate di P sono $(x_p; a x_p^2)$. Si calcolino ora le distanze di P da F e dalla direttrice $d: y + p = 0$.

$$\begin{aligned} d(P; F) &= \sqrt{x_p^2 + (a x_p^2 - p)^2} = \sqrt{x_p^2 + \left(\frac{1}{4p} x_p^2 - p\right)^2} = \\ &= \sqrt{x_p^2 + \frac{1}{16p^2} x_p^4 - \frac{1}{2} x_p^2 + p^2} = \sqrt{\frac{1}{16p^2} x_p^4 + \frac{1}{2} x_p^2 + p^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4p} x_p^2 + p\right)^2} = \left|\frac{1}{4p} x_p^2 + p\right| \\ D(P; d) &= |y + p| = \left|\frac{1}{4p} x_p^2 + p\right| \end{aligned}$$

Da cui

$$\left|\frac{1}{4p} x_p^2 + p\right| = \left|\frac{1}{4p} x_p^2 + p\right|$$

cioè $d(P; F) = d(P; d)$

L'equazione 2) è stata trovata partendo dalla proprietà geometrica dei punti del piano, col metodo analitico si è determinato un sistema di riferimento cartesiano, si sono determinati le coordinate dei punti fissi e successivamente si sono applicate le regole della geometria analitica e dell'algebra. Una volta trovata l'equazione si è partiti da tale equazione e si è scelto un punto arbitrario, le cui coordinate soddisfano l'equazione stessa; e, si è verificato attraverso regole algebriche che vale la relazione geometrica iniziale. Pertanto il luogo geometrico definisce l'equazione e l'equazione definisce il luogo geometrico. dunque luogo geometrico, nel caso la parabola, ed equazione sono due modi diversi di studiare la parabola.

L'equazione che precede la 2) non è quella che abbiamo trovato nel primo capitolo, tuttavia con una scelta diversa del sistema di riferimento si determina la forma di equazione uguale a quella. Infatti se si invertono gli assi cartesiani del riferimento e si pone la distanza fuoco direttrice uguale a p , si arriva all'equazione

$$y^2 = 2px$$

Si assuma come asse delle ascisse x la retta perpendicolare alla direttrice d e passante per il fuoco F e come asse delle ordinate y la retta perpendicolare alla retta x nel punto O della retta x equidistante da F e da d . Il punto O , essendo il punto di intersezione degli assi di riferimento è l'origine del sistema. Si ponga per convenzione che il punto H di intersezione tra la direttrice d e l'asse delle x precede il punto O e che F segue O , pertanto il segmento OH è negativo ed OF è positivo, essendo O punto medio H ed F sono equidistanti da O . Nel sistema di riferimento costruito le coordinate del fuoco sono $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ e l'equazione della direttrice è $x + \frac{p}{2} = 0$; se le coordinate del

generico punto sono $P(x, y)$, applicando la distanza di due punti e la distanza punto retta nella forma implicita, si ha che

$$d(P; F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad d(P; d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Sostituendo nella relazione $d(P; F) = d(P; d)$, si ha

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Operando algebricamente

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

eliminando e trasportando si ha

$$y^2 = 2px$$

che risulta l'equazione della parabola trovata col metodo geometrico. La differenza fra le due forme consiste nel cambio di riferimento e che l'asse di simmetria della parabola nel primo caso coincide con l'asse delle ordinate y , nel secondo caso invece coincide con l'asse delle x ed inoltre si è posto nel primo caso $d(F; d) = p$ e nel secondo $2p$. Trattandosi di parametri, quindi valori assegnati, tale impostazione non altera la natura e la forma della curva.

Analisi dell'equazione e dei parametri relativi a $y = ax^2$

Nell'equazione canonica della parabola l'unico parametro che vi figura è il parametro a , che risulta dipendente da p : cioè dalla distanza del fuoco F dall'origine del sistema di riferimento o vertice della parabola. Man mano che il fuoco si avvicina all'origine anche la direttrice si avvicina all'origine, il valore di p diminuisce, mentre il valore di a aumenta, da qui discende che l'apertura della parabola va sempre più diminuendo: questo determina nel punto O una curvatura che va sempre più aumentando, mantenendosi rivolta verso il semiasse positivo delle ordinate se $a > 0$ altrimenti verso il semiasse negativo delle ordinate se $a < 0$: ciò dipende anche dal fatto che fuoco e direttrice si invertono per simmetria rispetto all'origine del sistema di riferimento. Quindi il parametro a ci dà due informazioni, relativamente all'equazione scritta: una relativa al verso della concavità e l'altra se la curvatura in O è più o meno accentuata.

Se la concavità è rivolta verso il semiasse positivo delle ordinate il vertice O della parabola è un punto di minimo, essendo il più piccolo dei valori che la parabola può assumere sull'asse delle ordinate; se la concavità è rivolta verso il semiasse negativo delle ordinate il vertice O della parabola è un punto di massimo, essendo il più grande dei valori che la parabola può assumere sull'asse delle ordinate. La parabola, avendo in comune con l'asse delle ascisse il solo punto O , è tangente in questo punto a tale asse.

Poiché l'equazione presenta la variabile x al quadrato la parabola è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate che costituisce per la parabola l'asse di simmetria

Punti e rette notevoli:

Il punto $O(0; 0)$ è il vertice della parabola

Il punto $F(0; \frac{1}{4a})$ è il fuoco della parabola

La retta $x = 0$ è l'asse della parabola

La retta $y = -\frac{1}{4a}$ è la direttrice della parabola.

IPERBOLE

Def. **L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza delle distanze da due punti fissi sia costante.**

Siano F_1 ed F_2 i due punti fissi e sia $2c$ (con $c > 0$) il valore della loro distanza: $d(F_1; F_2) = 2c$. Sia $2a$ (con $a > 0$) il valore della differenza costante delle distanze di un generico punto P da F_1 ed F_2

$$|d(P; F_2) - d(P; F_1)| = 2a$$

Si assuma come asse delle ascisse x la retta sostegno dei punti F_1 ed F_2 e come asse delle ordinate y la retta perpendicolare alla retta x nel punto medio O del segmento F_1F_2 . Il punto O , essendo il punto di intersezione degli assi di riferimento è l'origine del sistema. Si ponga per convenzione che sull'asse delle x il punto F_1 precede il punto O e che F_2 segue O , pertanto il segmento OF_1 è negativo ed OF_2 è positivo, essendo O punto medio F_1 ed F_2 sono equidistanti da O . Nel sistema di riferimento costruito le coordinate dei due punti sono $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$; se le coordinate del generico punto sono $P(x, y)$, applicando la distanza di due punti si ha:

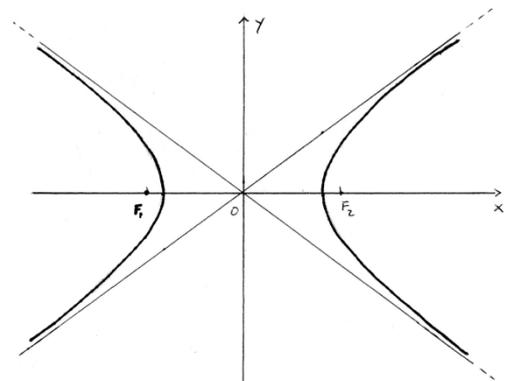


Fig. 4

$$d(P; F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d(P; F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

sostituendo nella relazione del luogo si ha

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

Tenendo presente i passaggi algebrici effettuati nel primo capitolo si giunge all'equazione

$$3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con la condizione che $c^2 - a^2 = b^2$, con $c > a$ per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo F_1PF_2 : ogni lato è maggiore della differenza degli altri due $2c > 2a$.

Tale equazione si chiama *equazione canonica dell'iperbole*.

Si vuole verificare che dato un punto $P (x_p ; y_p)$ del primo quadrante del piano cartesiano precedentemente determinato, che soddisfa l'equazione 3) con la condizione $c^2 - a^2 = b^2$ la relazione

$$|d(P; F_2) - d(P; F_1)| = 2a$$

è soddisfatta.

Perché P soddisfi l'equazione 3) le sue coordinate sono $P (x_p ; \frac{b}{a}\sqrt{x_p^2 - a^2})$. Si calcolino le distanze di P da F_1 e da F_2 :

$$\begin{aligned} d(P; F_1) &= \sqrt{(x_p + c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_p^2 - a^2)} = \sqrt{(x_p + c)^2 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x_p^2 - a^2)} = \\ &= \sqrt{x_p^2 + 2cx_p + c^2 + a^2 - c^2 - x_p^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \sqrt{2cx_p + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x_p\right)^2} = a + \frac{c}{a}x_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P; F_2) &= \sqrt{(x_p - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_p^2 - a^2)} = \sqrt{(x_p - c)^2 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x_p^2 - a^2)} = \\ &= \sqrt{x_p^2 - 2cx_p + c^2 + a^2 - c^2 - x_p^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \sqrt{-2cx_p + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x_p^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_p - a\right)^2} = \frac{c}{a}x_p - a \end{aligned}$$

Sottraendo le due distanze

$$|d(P; F_2) - d(P; F_1)| = \left| a + \frac{c}{a}x_p + a - \frac{c}{a}x_p \right| = 2a$$

$$|d(P; F_2) - d(P; F_1)| = 2a$$

NB. Si è preso un punto del primo quadrante per non tener conto del segno nell'estrazione di radice, comunque qualunque punto del piano cartesiano si prenda nella composizione dei segni si giunge sempre allo stesso risultato. Pertanto qualunque sia il punto P soddisfacente l'equazione 3) vale la relazione $|d(P; F_2) - d(P; F_1)| = 2a$.

L'equazione 3) è stata trovata partendo dalla proprietà geometrica dei punti del piano, col metodo analitico si è determinato un sistema di riferimento cartesiano, si sono determinati le coordinate dei punti fissi e successivamente si sono applicate le regole della geometria analitica e dell'algebra.

Una volta trovata l'equazione si è partiti da tale equazione e si è scelto un punto arbitrario, le cui coordinate soddisfano l'equazione stessa; e, si è verificato attraverso regole algebriche che vale la relazione geometrica iniziale. Pertanto il luogo geometrico definisce l'equazione e l'equazione definisce il luogo geometrico. dunque luogo geometrico, nel caso l'iperbole, ed equazione sono due modi diversi di studiare l'iperbole.

Analisi dell'equazione 3) e ruolo dei parametri

Ricavando dall'equazione 1) , detta forma implicita, le due forme esplicite: una relativa alla variabile y e l'altra rispetto alla variabile x , si ha

$$Y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 - b^2}$$

Imponendo le condizioni di esistenza dei radicali, si ottengono le seguenti condizioni di variabilità rispettivamente della x e della y :

$$x \leq -a \vee x \geq a \quad \text{e} \quad y \leq -b \vee y \geq b$$

Considerato che $x = \pm a$ sono due rette parallele e simmetriche all'asse delle ordinate; e, che

$y = \pm b$ sono due rette parallele e simmetriche rispetto all'asse delle ascisse, ne deriva che l'ellisse risulta una curva aperta ed illimitata tutta esterna al rettangolo individuato dalle suddette parallele agli assi, inoltre tracciando le rette sostegno delle diagonali di tale rettangolo i due rami dell'iperbole sono comprese entro l'angolo formato da tali rette contenente in questo caso l'asse delle ascisse x . Infatti intersecando la 3) con una

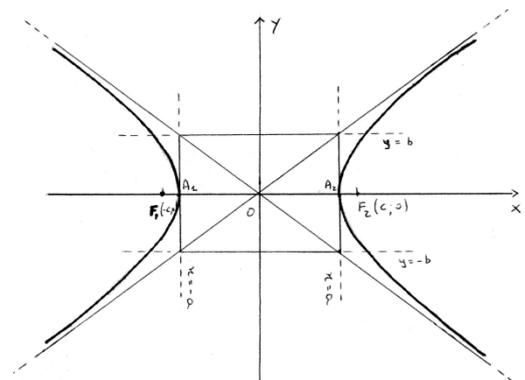


Fig. 5

retta parallela all'asse delle ordinate entro il campo di variazione delle x si ha che il segmento intercettato su tale retta dall'iperbole è sempre compreso nel segmento intercettato sulla stessa retta dalle due rette diagonali del rettangolo. Inoltre si nota che crescendo in valore assoluto l'ascissa x la differenza dei due segmenti va diminuendo ed è sempre possibile fissato un valore positivo ε piccolo a piacere esiste una retta parallela all'asse delle ordinate di ascissa \bar{x} tale che la differenza in valore assoluto dei segmenti intercettati su di essa è minore di ε . I matematici nel tempo hanno chiamato questa situazione *tangenza all'infinito* dell'iperbole con le rette diagonali e le rette diagonali sono chiamate *asintoti dell'iperbole*. Nel primo capitolo tali rette sono le rette di intersezione del piano sezione passante per il vertice del cono con la superficie conica, che risulta essere il caso degenere della conica. Verifichiamo tale situazione: sia $x = q$, supponiamo con $q > a$, e siano $y = \pm \frac{b}{a} x$ le due rette diagonali. Intersechiamo la retta $x=q$ prima con l'iperbole e poi con le due rette e determiniamo le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = q \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \\ x = q \end{cases} \quad A \left(q; \frac{b}{a} \sqrt{q^2 - a^2} \right) \quad \text{e} \quad A' \left(q; -\frac{b}{a} \sqrt{q^2 - a^2} \right)$$

$$d(A; A') = 2 \frac{b}{a} \sqrt{q^2 - a^2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x = q \end{cases} \quad B(q; \frac{b}{a}q) \quad ; \quad \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ x = q \end{cases} \quad B'(q; -\frac{b}{a}q)$$

$$d(B; B') = 2 \frac{b}{a}q$$

Confrontando le due distanze: $d(A; A') \leq d(B; B')$, si ha

$$2 \frac{b}{a} \sqrt{q^2 - a^2} \leq 2 \frac{b}{a}q$$

dividendo ambo i termini per $2 \frac{b}{a}$ ed elevando al quadrato ambo i termini si ha

$$q^2 - a^2 \leq q^2$$

Eliminando quantità uguali si ha: $-a^2 < 0$ cioè $d(A; A') < d(B; B') \forall q \in R$. Man mano che q assume valori grandissimi la differenza $q^2 - a^2$ si va sempre più avvicinando al valore di q^2 e quindi i punti A e B da una parte e A' e B' dall'altra parte si vanno sempre più avvicinando fino a toccarsi all'infinito.

Se ora si interseca l'iperbole con l'asse delle ascisse: cioè si mettono a sistema l'equazione 3) con l'equazione dell'asse delle ascisse

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si hanno i punti di intersezione di coordinate $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$

Se ora si interseca l'iperbole con l'asse delle ordinate: cioè si mettono a sistema l'equazione 3) con l'equazione dell'asse delle ordinate

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Non si hanno punti di intersezione.

Dalla condizione $a^2 + b^2 = c^2$, deriva che non solo è c maggiore di a , ma è anche maggiore di b , il segmento A_1A_2 costituisce l'asse trasverso dell'iperbole e vale $2a$, per analogia con l'ellisse sia $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ è l'asse non trasverso dell'iperbole e vale $2b$, pertanto il parametro a misura il semiasse trasverso, il parametro b il semiasse non trasverso dell'iperbole e dall'impostazione dei punti F_1 ed F_2 , detti fuochi, deriva che il parametro c misura la semidistanza focale.

*) Nel primo capitolo si è definita l'iperbole come il luogo dei punti del piano tale che il rapporto tra la distanza da un punto fisso e da una retta fissa è maggiore di 1: cioè

$$\frac{d(P;F)}{d(P;r)} = e \quad (\text{con } e > 1)$$

Fissato sul piano un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale sia P un generico punto di tale piano di coordinate $(x; y)$ e sia F $(-c; 0)$ il punto fisso e la retta r , relativa ad F, di equazione $x = -\frac{a^2}{c}$. Si calcolino la

$$d(P, F) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad , \quad d(P, r) = \left| \frac{cx+a^2}{c} \right|$$

posto $e = \frac{c}{a}$ e sostituendo i valori nella relazione $\frac{d(P;F)}{d(P;r)} = e$ si ha

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\left| \frac{cx+a^2}{c} \right|} = \frac{c}{a}$$

Operando algebricamente si ha

$$a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = |cx+a^2|$$

$$a^2 x^2 + 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2 + 2a^2 cx + a^4$$

cambiando di segno ambo i termini, si ha

$$(c^2 - a^2) x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)$$

Dividendo ambo i termini per $a^2 (c^2 - a^2)$ e semplificando e posto $a^2 + b^2 = c^2$ si ha

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Che risulta ancora l'equazione canonica dell'iperbole.

L'iperbole, presentando nella sua equazione le variabili al quadrato (come si avrà modo di dimostrare nel capitolo delle trasformazioni), è una curva simmetrica rispetto agli assi e all'origine del sistema di riferimento. Tale origine costituisce il centro dell'iperbole.

Punti, segmenti e rette notevoli dell'iperbole:

Il punto O $(0; 0)$ è il centro, così pure centro di simmetria

I punti $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$ sono i fuochi

I punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ sono i vertici

I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 di misura rispettivamente $2a$ e $2b$ sono l'asse trasverso e l'asse non trasverso: segmenti che appartengono alle rette $x = 0$ e $y = 0$

Le rette $y = \pm \frac{b}{a}x$ sono gli asintoti dell'iperbole: tali rette, come si dimostrerà in un'altra parte del libro, non sono altro che i fattori di decomposizione del binomio presente nell'equazione

canonica dell'iperbole uguagliati a zero: infatti $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$

da cui $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$: cioè $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, che con scrittura sintetica si ha

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Iperbole equilatera

Nell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

canonica

dell'iperbole

Se $a = b$, l'iperbole assume una forma diversa $x^2 - y^2 = a^2$. A tale iperbole si dà nome di *iperbole equilatera riferita agli assi* e le rette $y = \pm x$ sono i suoi asintoti: tali rette sono le bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento e sono rette perpendicolari. La relazione che lega i parametri dell'iperbole in questo contesto si riducono a $c = a\sqrt{2}$ ed $e = \sqrt{2}$

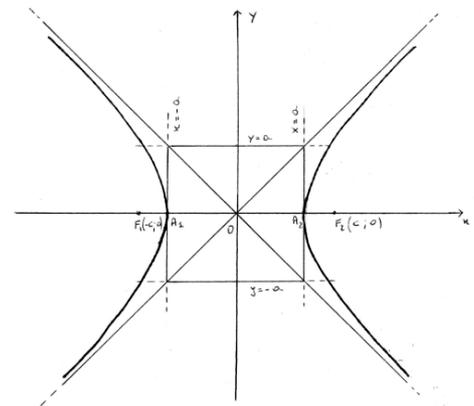


Fig.6

Casi degeneri delle coniche

Come si è detto nell'iperbole le diagonali del rettangolo fondamentale costituiscono il caso degenero dell'iperbole e poco sopra si è visto che tale rette si trovano annullando il binomio di secondo grado nell'equazione canonica; se ora per analogia si estende tale situazione algebrica all'ellisse e alla parabola, si avrà che l'ellisse degenera in un punto, infatti uguagliando a zero il

binomio $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ l'unico punto del piano cartesiano che soddisfa l'equazione è $O(0; 0)$;

mentre per la parabola $ax^2 = 0$: cioè $x = 0$ viene soddisfatta da tutti i punti posti sull'asse delle ordinate, quindi la parabola degenera in una retta contata due volte: cioè due rette parallele e coincidenti. Questo fatto dipende da una situazione geometrica infatti nel primo capitolo si sono definite coniche le sezioni di una superficie conica indefinita a doppia falda con un piano non

passante per il vertice. Se ora si fa passare il piano sezione per il vertice, applicando il teorema enunciato all'inizio del primo capitolo abbiamo tre diversi casi

-) il piano interseca in un punto la superficie conica, caso dell'ellisse e della circonferenza
-) il piano interseca in una generatrice ed essendo tangente alla superficie conica si intende che tale retta generatrice è contata due volte, caso della parabola
-) il piano interseca in due generatrici quindi in due rette distinte la superficie conica, caso dell'iperbole

Pertanto situazione algebrica e situazione geometrica coincidono, quindi i matematici coniarono il termine di ellisse degenera: il punto, se il piano passante per il vertice ha il solo vertice in comune con la superficie conica; parabola degenera: la retta, se il piano passante per il vertice ha una generatrice in comune con la superficie conica; iperbole degenera: le due rette, se il piano passante per il vertice ha due generatrici in comune con la superficie conica.

Si accennerà in altra parte del libro che con l'introduzione dei numeri complessi, l'ellisse e la circonferenza degenerano in due rette immaginarie, con l'introduzione di un cono col vertice all'infinito quindi un cilindro la parabola degenera in due rette parallele e distinte, l'iperbole continua anche in quei contesti a degenerare in due rette incidenti. Questo fatto indurrà ad affermare che le coniche degenerano sempre in due rette.

3 Condizioni per determinare una conica la cui equazione è in forma canonica.

Le equazioni delle diverse coniche affrontate presentano tutte le due variabili x ed y , che costituiscono l'ascissa e l'ordinata di un generico punto del piano cartesiano la cui dipendenza, l'una dall'altra e viceversa in termini di operazioni matematiche di tipo algebrico, definisce quelle proprietà del luogo insite nella definizione delle diverse coniche. Inoltre dette equazioni presentano dei parametri, che sono delle costanti numeriche: tali parametri devono essere stabiliti nei loro valori numerici prima di ogni analisi delle equazioni, perché la loro conoscenza permette di tracciare un determinato grafico. Infatti variando prima dello studio di una equazione i parametri, non varia la natura della conica: cioè se l'equazione è relativa all'ellisse, l'equazione con i diversi parametri è sempre relativa all'ellisse; cambia invece la forma del grafico ellisse. Da ciò deriva che per studiare una determinata equazione di una specifica conica al fine di tracciare il grafico relativo bisogna che si assegna all'inizio il valore numerico dei singoli parametri. Tale assegnazione può effettuarsi in due modi o sostituendo nell'equazione ai parametri i valori numerici o assegnando condizioni specifiche a cui la conica deve soddisfare per realizzare il suo grafico. Tali condizioni permettono di trovare relazioni algebriche che individuano univocamente il valore dei parametri: come soluzioni di equazioni o di sistemi di equazioni. Il numero di parametri presenti nell'equazione canonica fissa pure lo stesso numero di condizioni necessarie per individuare una conica. Detto questo analizziamo le diverse coniche singolarmente.

Ellisse

Nell'equazione canonica dell'ellisse sono presenti due parametri, pertanto per determinare una conica specifica bisogna assegnare due condizioni:

- Il passaggio per un punto assegnato dà una condizione: infatti sia $Q(x_q; y_q)$, si imponga che l'ellisse passa per Q quindi $\frac{x_q^2}{a^2} + \frac{y_q^2}{b^2} = 1$ da cui $b^2 x_q^2 + a^2 y_q^2 - a^2 b^2 = 0$,

$$b = \pm \sqrt{\frac{a^2 y_q^2}{a^2 - x_q^2}}$$

Noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione: per es. il passaggio per un altro punto purché non legato da vincoli di simmetria con il punto Q né rispetto agli assi né rispetto all'origine O.

73

- La conoscenza delle coordinate di un fuoco dà una condizione: infatti sia noto $F_1(-\bar{c}; 0)$, ricordando la relazione $a^2 - \bar{c}^2 = b^2$, da cui $b = \pm \sqrt{a^2 - \bar{c}^2}$

Noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione

- La conoscenza delle coordinate di un vertice dà una condizione, tale condizione è la stessa nella conoscenza di un semiasse: infatti sia noto $A_1(-\bar{a}; 0)$, nell'equazione si conosce a^2 mentre non è noto il valore di b^2 , quindi necessita di un'altra condizione; se si sceglie $B(0; \bar{b})$ nell'equazione si conosce b^2 mentre non è noto il valore di a^2 , quindi necessita di un'altra condizione.

- La conoscenza della direttrice dà una condizione: infatti $d_1 \equiv x = \gamma$, ma $d \equiv x = -\frac{c^2}{a}$, da cui $a = -\frac{c^2}{\gamma}$

- La conoscenza dell'eccentricità dà una condizione se $e = q$, dalla relazione $e = \frac{c}{a}$ elevando al quadrato e sostituendo si ha $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ da cui $b = \pm a \sqrt{1 - q^2}$; noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione.

Ulteriori condizioni si incontreranno quando si definirà la retta tangente all'ellisse, l'area dell'ellisse: qui per inciso diciamo che la conoscenza di questi enti dà una condizione. E' chiaro che le condizioni non sono finite. Nei problemi con l'ellisse se ne presenteranno altri tipi; comunque quelle esposte sono quelle che si presentano più spesso.

La composizione di due di queste condizioni permette di determinare l'equazione di un'ellisse specifica. Tale composizione consiste nel mettere a sistema le due condizioni, in modo da avere due equazioni in due incognite, che sono i due parametri.

Circonferenza

Nell'equazione canonica della circonferenza è presente un sol parametro: il raggio r , pertanto per determinare una circonferenza specifica bisogna assegnare una condizione:

- Il passaggio per un punto assegnato dà una condizione: infatti sia $Q(x_q; y_q)$, si imponga che la circonferenza passi per Q quindi $x_q^2 + y_q^2 = r^2$ da cui $r = \sqrt{x_q^2 + y_q^2}$,
- La conoscenza del raggio r dà una condizione
- La conoscenza dell'area dà una condizione : $r = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\pi}}$
- Quando si definirà la retta tangente alla circonferenza, la sua conoscenza dà una condizione

E' chiaro che le condizioni non sono finite . Nei problemi con la circonferenza se ne presenteranno altri tipi; comunque quelle esposte sono quelle che si presentano più spesso.

Parabola

Nell'equazione canonica della parabola è presente un parametro, pertanto per determinare una parabola specifica bisogna assegnare una condizione:

- Il passaggio per un punto assegnato dà una condizione: infatti sia $Q(x_q; y_q)$, si imponga che la parabola passi per Q quindi $y_q = ax_q^2$ da cui $a = \frac{y_q}{x_q^2}$,
- La conoscenza delle coordinate del fuoco dà una condizione: infatti sia noto $F_1(0; \beta)$, ricordando $F(0; \frac{1}{4a})$ si ha $\beta = \frac{1}{4a}$ da cui $a = \frac{1}{4\beta}$
- La conoscenza della direttrice dà una condizione ; infatti $d \equiv y = \gamma$, ma $d \equiv y = -\frac{1}{4a}$, da cui $a = -\frac{1}{4\gamma}$
- Quando si definirà la retta tangente alla parabola, la sua conoscenza dà una condizione

E' chiaro che le condizioni non sono finite . Nei problemi con la parabola canonica se ne presenteranno altri tipi; comunque quelle esposte sono quelle che si presentano più spesso.

Iperbole

Nell'equazione canonica dell'iperbole sono presenti due parametri, pertanto per determinare una iperbole specifica bisogna assegnare due condizioni:

- Il passaggio per un punto assegnato dà una condizione: infatti sia $Q(x_q; y_q)$, si imponga che la conica passa per Q quindi $\frac{x_q^2}{a^2} - \frac{y_q^2}{b^2} = 1$ da cui $b^2 x_q^2 - a^2 y_q^2 - a^2 b^2 = 0$,

$$b = \pm \sqrt{\frac{a^2 y_q^2}{x_q^2 - a^2}}$$

Noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione: per es. il passaggio per un altro punto purché non legato da vincoli di simmetria con il punto Q né rispetto agli assi né rispetto all'origine O.

- La conoscenza delle coordinate di un fuoco dà una condizione: infatti sia noto $F_1(-c; 0)$, ricordando la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, da cui $b = \pm \sqrt{c^2 - a^2}$

Noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione

- La conoscenza delle coordinate di un vertice dà una condizione, tale condizione è la stessa nella conoscenza di un semiasse: infatti sia noto $A_1(-a; 0)$, nell'equazione si conosce a^2 mentre non è noto il valore di b^2 , quindi necessita di un'altra condizione; se si sceglie $B(0; b)$ nell'equazione si conosce b^2 mentre non è noto il valore di a^2 , quindi necessita di un'altra condizione.

- La conoscenza della direttrice dà una condizione: infatti $d_1 \equiv x = \gamma$, ma $d \equiv x = -\frac{c^2}{a}$,

$$\text{da cui } a = -\frac{c^2}{\gamma}$$

- La conoscenza dell'eccentricità dà una condizione se $e = q$, dalla relazione $e = \frac{c}{a}$

elevando al quadrato e sostituendo si ha $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ da cui $b = \pm a \sqrt{q^2 - 1}$; noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione.

- La conoscenza di un asintoto dà una condizione: infatti posto $y = mx$ con m noto, confrontando con $y = \frac{b}{a} x$, si ha: $m = \frac{b}{a}$, da cui $b = ma$. Noto il valore di a si conosce il valore di b, ne deriva che si debba imporre una nuova condizione.

Ulteriori condizioni si incontreranno quando si definirà la retta tangente all'iperbole, qui per inciso diciamo che la conoscenza di questo ente dà una condizione. E' chiaro che le condizioni non sono finite. Nei problemi con l'iperbole se ne presenteranno altri tipi; comunque quelle esposte sono quelle che si presentano più spesso.

La composizione di due di queste condizioni permette di determinare l'equazione canonica di un'iperbole specifica. Tale composizione consiste nel mettere a sistema le due condizioni, in modo da avere due equazioni in due incognite, che sono i due parametri.

Nel caso dell'iperbole equilatera, figurando un sol parametro, una sola delle condizioni enunciate permette di determinare l'equazione di un'iperbole equilatera riferita agli assi specifica.

4 Costruzione grafica di una conica canonica.

Tracciamento geometrico-analitico

Nella storia della matematica i luoghi geometrici, come si è visto nell'introduzione, venivano distinti in tre categorie per l'uso di tecniche opportune per il tracciamento dei grafici: così i luoghi piani adoperavano riga e compasso, i luoghi solidi adoperavano sezioni di solidi, i luoghi lineari adoperavano strumenti articolati che con il loro movimento disegnavano il grafico. Durante i secoli valenti matematici si sono cimentati ad individuare strumenti capaci disegnare il grafico di particolari curve: per es. G. Galilei inventò il compasso ellittico per tracciare un'ellisse. In geometria analitica il metodo del tracciamento di un grafico di una data curva viene effettuato in generale conoscendo i punti del piano che soddisfano l'equazione della curva: strategie particolari sono fondate su proprietà geometriche che la curva presenta. Comunque poiché l'equazione di una conica in forma canonica è un'equazione a due incognite è possibile in modo alquanto elementare dare dei valori ad una variabile, entro il suo campo di variazione, e calcolare i valori o il valore dell'altra variabile e successivamente sfruttare eventuali simmetrie. Questo metodo è fondato sul teorema di C.N.S di appartenenza di un punto ad una curva, enunciato precedentemente. Vediamo alcune costruzioni per le singole coniche.

Ellisse.

- 1) Si consideri l'ellisse di centro O , asse maggiore $A_1A_2 = 2a$, asse minore $B_1B_2 = 2b$ con fuochi assegnati F_1 ed F_2 e sia P un suo punto. Per definizione di ellisse si ha

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Sia $X \in F_1F_2$ tale che $A_1X = q$ e di conseguenza $XA_2 = 2a - q$. Si traccino le due circonferenze di centri rispettivamente in F_1 ed F_2 e raggi rispettivamente q e $2a - q$; queste circonferenze si intersecano nel punto P , che soddisfa alla relazione $PF_1 + PF_2 = 2a$ infatti $q + 2a - q = 2a$, $2a = 2a$. Variando il punto X sul segmento F_1F_2 e tracciando le varie circonferenze di centri F_1 e F_2 si determinano tutti i punti dell'ellisse.

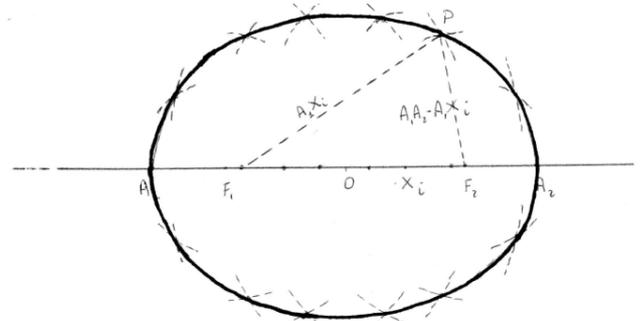


Fig. 7

- 2) Si consideri l'ellisse di centro O , asse maggiore $A_1A_2 = 2a$, asse minore $B_1B_2 = 2b$. Si traccino due circonferenze concentriche di centro O e raggi rispettivamente a e b .

Sia $y=mx$ una generica retta passante O , questa interseca le due circonferenze

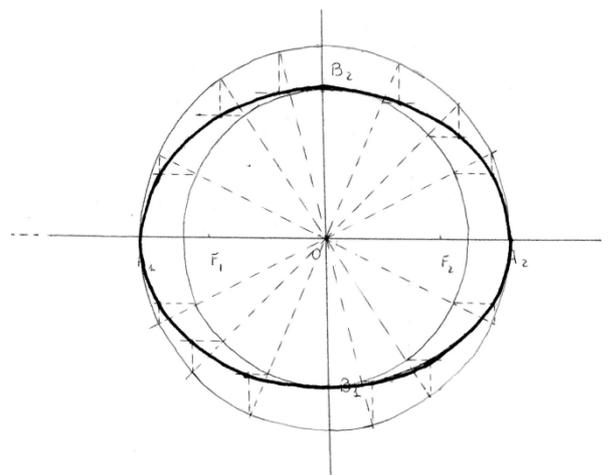


Fig. 8

rispettivamente in Q_1 ed Q_2 , R_1 ed R_2 , se da Q_1 o Q_2 si tracci la retta parallela all'asse delle ordinate e da R_1 o R_2 la parallela all'asse delle ascisse, queste si intersecano nel punto P_1 o P_2 , che costituiscono due punti simmetrici rispetto ad O dell'ellisse. Infatti siano $x^2 + y^2 = a^2$ ed $x^2 + y^2 = b^2$, poste singolarmente a sistema con $y=mx$ si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y = mx \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + m^2x^2 = a^2 \\ y = mx \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \\ y = \pm \frac{am}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

$$Q_1\left(-\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}; -\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}\right) \quad \text{e} \quad Q_2\left(\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}; \frac{am}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ y = mx \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + m^2x^2 = b^2 \\ y = mx \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{b}{\sqrt{1+m^2}} \\ y = \pm \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

$$R_1\left(-\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}; -\frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}\right) \quad \text{e} \quad R_2\left(\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}; \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

Siano $x = \pm \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$ le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per Q_1 e Q_2 ;

$$y = \pm \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}$$

le rette parallele all'asse delle ascisse passanti per R_1 e R_2 . Intersecando le rette, si ottengono i punti

$$P_1\left(-\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}; -\frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}; \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

Sostituiti nell'equazione canonica dell'ellisse si ha indifferentemente figurando al quadrato le variabili si ha

$$\frac{\left(\pm \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\pm \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2}{b^2} = 1,$$

calcolando i quadrati e semplificando si ha l'identità $1 = 1$, quindi i due punti appartengono all'ellisse.

Ripetendo la costruzione dopo aver ruotato la retta: cioè modificando il coefficiente angolare m , si ottengono quanti punti si vogliono dell'ellisse.

Parabola

-) Sia data la parabola di fuoco F e direttrice d e sia $x=0$ il suo asse, si tracci una retta t parallela alla direttrice tale che la sua distanza q da questa sia maggiore della semidistanza della distanza fuoco-direttrice. Si tracci la circonferenza di centro F e raggio q , questa interseca la retta t in due punti Q_1 e Q_2 simmetrici rispetto all'asse della parabola, tali punti sono punti della parabola: infatti sono equidistanti per costruzione dalla direttrice e dal fuoco. Per trovare altri punti basta ripetere lo stesso procedimento: cioè tracciare un'altra retta parallela alla direttrice ... Unendo questi punti si ha il grafico della parabola.

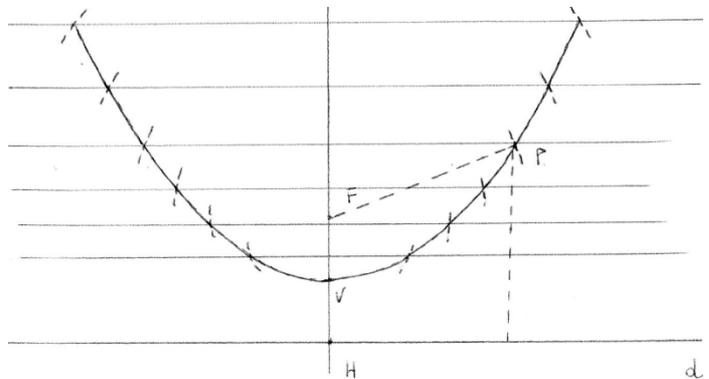


Fig. 9

-) Si tracci la direttrice ed il fuoco della parabola, quindi da F si tracci la perpendicolare alla direttrice, si prenda sulla direttrice un punto H_i e sia M il punto medio del segmento FH_i .

Si tracci ora l'asse del segmento FH_i , questo interseca la retta perpendicolare alla direttrice condotta da H_i nel punto P_i , tale punto è un punto della parabola. Al variare di H su d , ripetendo lo stesso procedimento si ottengono punti della parabola. Unendo questi punti si ha il grafico della parabola.

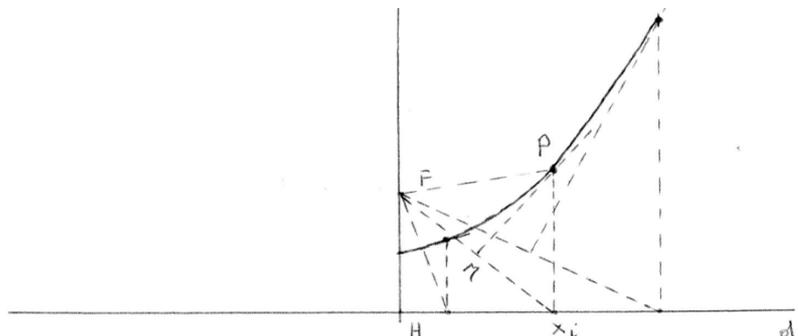


Fig. 10

Iperbole

1) Sia X un punto dell'asse trasverso A_1A_2 non appartenente a F_1F_2 , con F_1 ed F_2 fuochi tale che $A_1X = q$ e di conseguenza $XA_2 = q - 2a$.

Si traccino le due circonferenze di centri rispettivamente in F_1 ed F_2 e raggi rispettivamente q e $q - 2a$ queste circonferenze si intersecano nel punto P , che soddisfa alla relazione $|PF_1 - PF_2| = 2a$: infatti $|q - (q - 2a)| = 2a$, con $q \geq c + a$: infatti considerando il triangolo PF_1F_2 si ha $PF_1 + PF_2 \geq F_1F_2$, cioè $q + q - 2a \geq 2c$ da cui $2q - 2a \geq 2c$ e quindi $q \geq c + a$. Variando il punto X esternamente al segmento F_1F_2 e tracciando

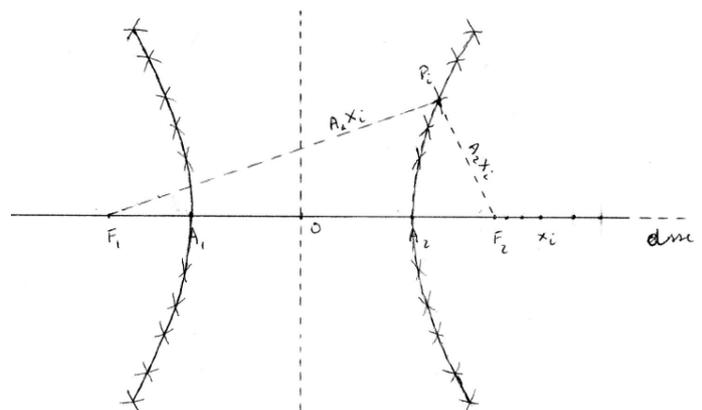


Fig. 11

le varie circonferenze di centri F_1 e F_2 si determinano altri punti, unendo tali punti si ha il grafico dell'iperbole.

- 2) Siano A_1A_2 l'asse trasverso e B_1B_2 l'asse non trasverso, sia $A_1B_1A_2B_2$ il rettangolo fondamentale. Si tracciano le diagonali di tale rettangolo, queste costituiscono gli asintoti dell'iperbole da tracciare.

Da A_1 si traccia il fascio di rette e sia r una di queste. La retta r interseca gli asintoti in E ed F . Il punto A_1 divide il segmento EF in due parti di cui una maggiore (si supponga $A_1F > A_1E$) dell'altra. Su tale parte maggiore si stacchi a partire dal punto intersezione con l'asintoto (nel caso F) un segmento congruente alla parte minore (nel caso A_1E), l'estremo di tale segmento è un punto P dell'iperbole. Iterando il procedimento alle rette del fascio si individuano altri punti, unendo tali punti si ha il grafico dell'iperbole.

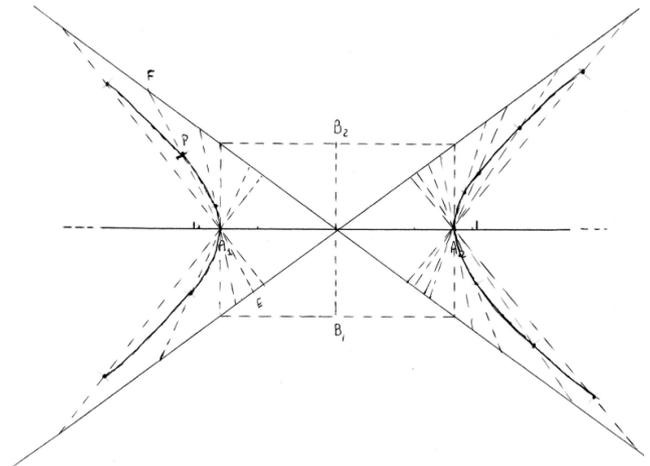


Fig. 12

Questa costruzione si fonda su un teorema, che in altro capitolo si dimostrerà. Tale teorema afferma che “ se una retta interseca l'iperbole e gli asintoti di questa, i due segmenti della retta compresi tra gli asintoti e l'iperbole sono congruenti “

Tracciamento meccanico

Metodi alquanto approssimativi sono quelli che usano movimenti continui della punta di una matita, che tende un filo flessibile ma rigido: cioè soggetto a tensione non si allunga.

Ellisse:

Materiale occorrente: filo, matita e foglio

Sia dato un filo la cui lunghezza è uguale a $A_1A_2 = 2a$. Posto il filo su un foglio, fissare gli estremi in due punti, che costituiscono i fuochi dell'ellisse da tracciare, quindi con una matita appuntita tendere il filo e farla muovere, mantenendo costante la tensione sul filo, la matita descriverà sul foglio la curva ellisse.

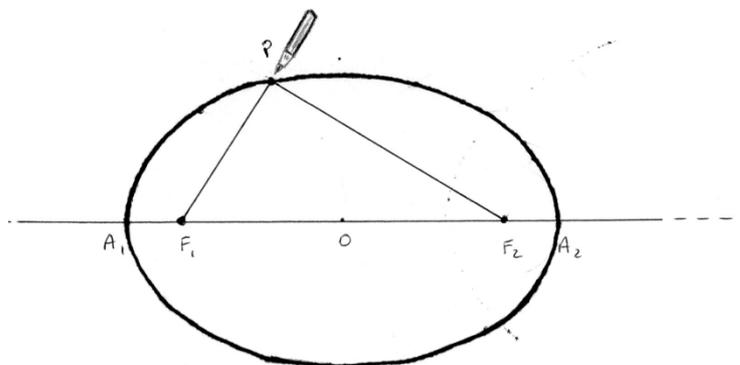


Fig. 13

Parabola:

Materiale occorrente: filo, una squadra 30°-60° , una riga, matita e foglio.

Si faccia coincidere la costola di una riga con una retta tracciata sul foglio, che costituisce la direttrice della parabola da tracciare, e si fa combaciare tale costola con il cateto minore della squadra. Si prenda il filo lungo quanto il cateto maggiore della squadra e si fissino gli estremi del filo uno nel punto focale della parabola da tracciare e l'altro nel vertice dell'angolo acuto della squadra adiacente al cateto

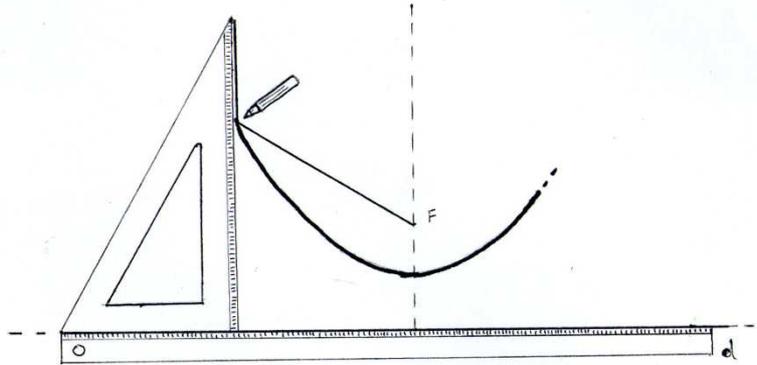


Fig. 14

maggiore. Se si tende costantemente questo filo contro il cateto maggiore della squadra per mezzo di una matita e se si fa scorrere la squadra lungo la riga, la punta della matita descriverà l'arco di parabola, badando bene ad invertire la squadra una volta superato l'asse della parabola, che è la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco.

Iperbole:

Materiale occorrente : filo, una riga con dispositivo di rotazione ad un estremo di essa, una matita ed un foglio.

Si determino sul foglio due punti, che costituiranno i fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole , e altri due A_1 e A_2 interni al segmento F_1F_2 , che costituiscono i vertici dell'iperbole, e l'asse trasverso. Si fissi in uno dei fuochi F_1 l'estremo della riga con dispositivo di rotazione, in modo che la riga possa ruotare con centro F_1 . Si prenda il filo, la cui lunghezza è minore di quella della riga della quantità costante $A_1A_2 = 2a$, e lo

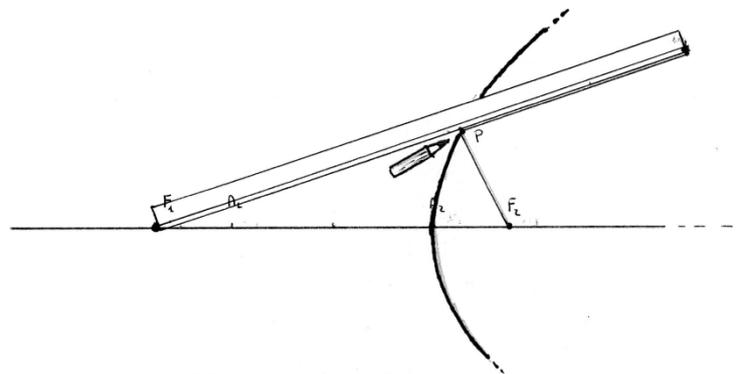


Fig. 15

si fissi per un estremo al punto F_2 e per l'altro all'estremo libero della riga. Se si tende costantemente il filo contro la costola della riga per mezzo di una matita e se si fa ruotare la riga, la punta della matita descriverà un arco di iperbole; per l'altro arco basti invertire il sistema di rotazione e l'ancoraggio delle estremità del filo.

In commercio esistono dispositivi di tracciamento delle coniche: ellissografi, iperbolografi, che sfruttano dispositivi articolati o archi pretracciati a diversa concavità

5 GONIOMETRIA

FUNZIONI CIRCOLARI

Fissato un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale xOy si chiama circonferenza goniometrica la circonferenza canonica di centro l'origine del sistema e raggio unitario: $r = 1$, sulla quale si è stabilito un orientamento degli archi: con origine il punto A d'intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse e verso di percorrenza dei punti della circonferenza antiorario.

Preso comunque un punto P della circonferenza, esso determina con l'origine A un arco AP. Tale arco sottende un angolo al centro AOP. Per un teorema di geometria elementare: “ in una circonferenza ad archi congruenti sottendono angoli al centro congruenti

“ possiamo porre una corrispondenza biunivoca tra archi ed angoli al centro sottesi. Vale la seguente relazione

$$2\pi r : l = 360^\circ : \alpha^\circ$$

Dove l è la lunghezza dell'arco AP e α° è la misura dell'angolo in gradi sessagesimali: da cui applicando le regole delle proporzioni si ha

$l = \frac{2\pi r}{360^\circ} \alpha^\circ \rightarrow$ posto $r = 1$ e semplificata la frazione, si ha $l = \frac{\pi}{180} \alpha$; posto $\frac{\pi}{180}$ il fattore costante di conversione da angoli sessagesimali in angoli radianti , al variare di α radianti corrisponde il valore dell'arco l : pertanto possiamo assumere il valore di $\alpha \text{ rad}$ come la misura dell'angolo AOP, che risulta un numero reale.

Quindi per ogni numero reale $\alpha \in [0 ; 2\pi]$, esiste un punto P della circonferenza goniometrica tale che l'arco $AP = \alpha$

Il numero reale α : cioè la misura in radianti dell'angolo AOP, poteva essere individuato trovando l'area del settore circolare AOP: $\mathcal{A} = \frac{1}{2} r \alpha$; poiché $r = 1 \rightarrow \alpha = 2\mathcal{A}$. Quindi si può affermare che la misura in radianti dell'angolo circolare AOP è il doppio dell'area del settore circolare AOP.

Proiettando ortogonalmente il punto P sugli assi cartesiani, si ha che

$$PH = \text{sen} \alpha \quad ; \quad OH = \text{cos} \alpha$$

Def. **Si** definiscono *seno* e *coseno* dell'angolo AOP l'ordinata e l'ascissa dell'estremo libero P dell'arco AP.

Il punto P , come punto del piano cartesiano, ha coordinate $P (\text{cos} \alpha ; \text{sen} \alpha)$. Essendo la circonferenza goniometrica di raggio 1 , sia il coseno che il seno , al variare di P assumono tutti i valori compresi nell'intervallo chiuso $[-1 ; 1]$. Inoltre le coordinate di P soddisfano l'equazione della circonferenza canonica:

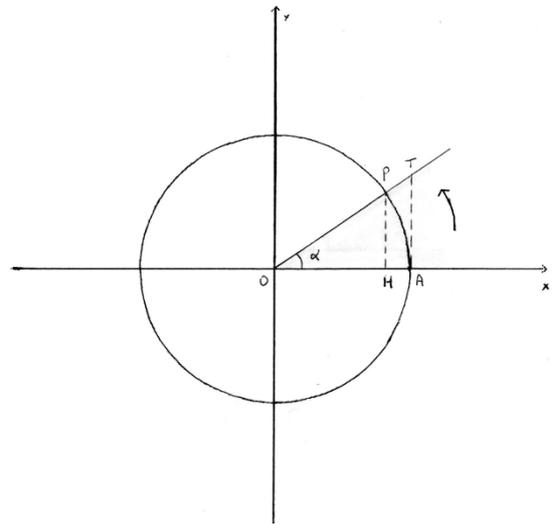


Fig. 16

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

detta *relazione fondamentale della goniometria*.

Se dall'origine degli archi orientati A si traccia la retta tangente alla circonferenza, essa incontra la semiretta OP nel punto T. I triangoli HOP e AOT sono due triangoli rettangoli con l'angolo acuto $\text{HOP} = \text{AOT}$ in comune, pertanto per la similitudine dei triangoli HOP è simile ad AOT e quindi avranno i lati corrispondenti in proporzione in particolare $AT : HP = OA : OH$. Applicando la proprietà delle proporzioni si ha : $AT = \frac{HP \cdot OA}{OH}$. Sostituendo i valori $OA = 1$, $HP = \sin \alpha$ e

$$OH = \cos \alpha, \text{ si ha la seconda relazione fondamentale della goniometria: } AT = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Considerato che AT è un segmento della tangente geometrica, si conviene scrivere $AT = \tan \alpha$

La seconda relazione fondamentale diviene:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

La $\tan \alpha$ assume tutti i valori dell'asse reale: $(-\infty ; +\infty)$, con $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Al variare di α varia P, di conseguenza possiamo considerare le coordinate di P e la $\tan \alpha$ come funzioni, che chiameremo funzioni circolari:

$$y = \sin x \quad ; \quad y = \cos x \quad ; \quad y = \tan x$$

Grafico sinusoidale

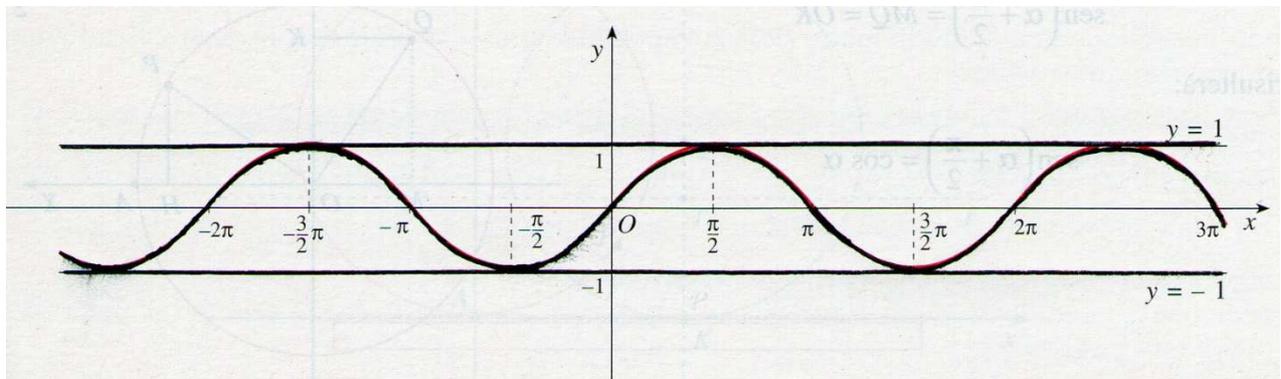


Fig. 17

Grafico cosinusoidale

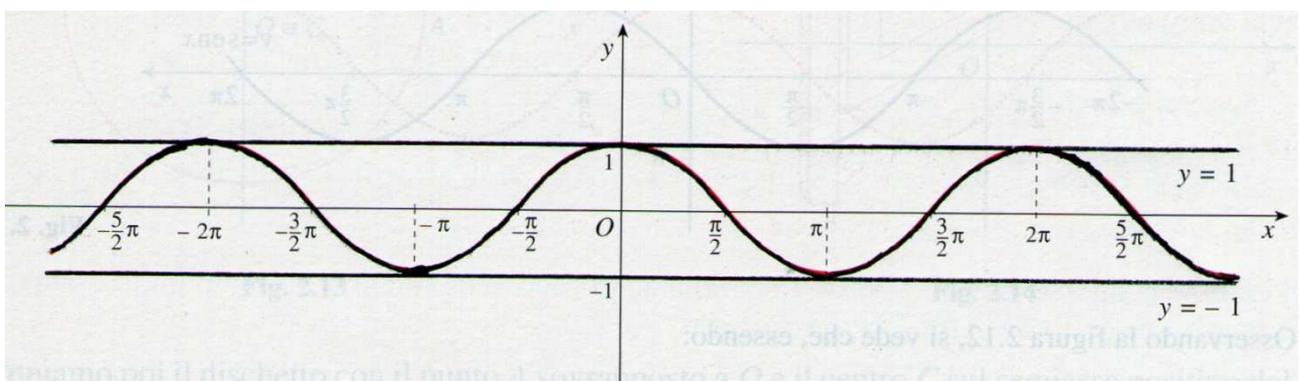


Fig. 18

Grafico tangente

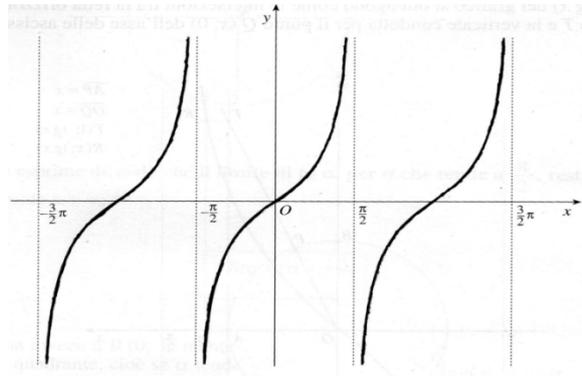


Fig. 19

Corrispondenti a dette funzioni ci sono le funzioni reciproche,

$$y = \frac{1}{\text{sen}x} = \text{cosec}x, \quad y = \frac{1}{\text{cos}x} = \text{sec}x, \quad y = \frac{1}{\text{tang}x} = \text{cotag}x$$

il cui significato geometrico è dato osservando la figura accanto

- per la cosecante l'ordinata del punto di intersezione della tangente geometrica alla circonferenza nell'estremo libero P dell'arco AP e l'asse delle ordinate: cioè $OC = \text{cosec}x$
- per la secante l'ascissa del punto di intersezione della tangente geometrica alla circonferenza nell'estremo libero P dell'arco AP e l'asse delle ascisse: cioè $OD = \text{sec}x$
- per la cotangente l'ascissa del punto di intersezione della tangente geometrica alla

circonferenza nell'estremo B dell'arco del primo quadrante e la semiretta OP: cioè $BE = \text{cotag}x$

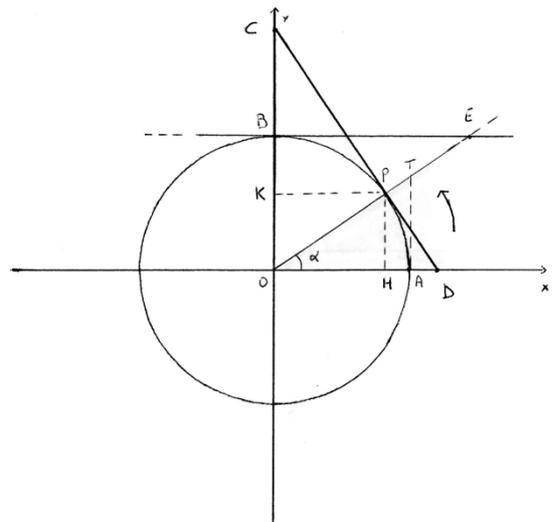


Fig. 20

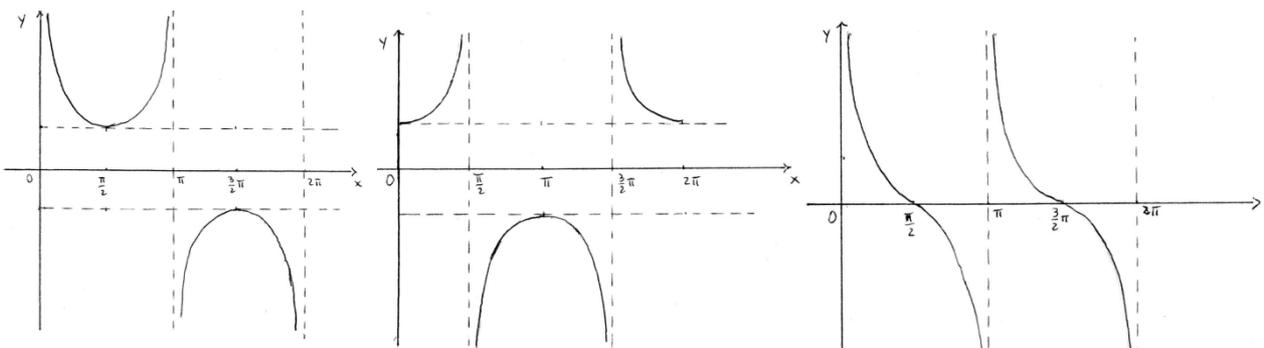


Fig. 21

Le relazioni fondamentali a cui soddisfano le funzioni circolari sono

- Relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\text{Tang}x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\text{Cosec}x = \frac{1}{\sin x}$
- $\text{Sec}x = \frac{1}{\cos x}$
- $\text{Cotang}x = \frac{1}{\text{tang}x}$

Le funzioni $y = \sin x$ e $y = \tan x$ sono funzioni dispari: $\sin(-x) = -\sin x$ e $\tan(-x) = -\tan x$; mentre la funzione $y = \cos x$ è una funzione pari: $\cos(-x) = \cos x$.

Si hanno le formule di addizione

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \text{tang}(x \pm y) &= \frac{\text{tang}x \pm \text{tang}y}{1 \mp \text{tang}x \text{tang}y}\end{aligned}$$

Le formule di duplicazione

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \text{tang} 2x &= \frac{2 \text{tang}x}{1 - \text{tang}^2 x}\end{aligned}$$

Le formule di bisezione

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \cos \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \\ \text{tang} \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}\end{aligned}$$

Le formule razionali o parametriche

Posto $\tan \frac{x}{2} = t$, si ha

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

Le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \\ \operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y &= -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

Funzioni inverse circolari:

Le funzioni circolari ammettono le funzioni inverse per segmentazione: cioè negli intervalli del Campo di esistenza dove sussiste una corrispondenza biunivoca tra la variabile x e la variabile y .

Esse si ricavano ponendo $y = \operatorname{sen} x \rightarrow x = \operatorname{arcsen} y = \operatorname{sen}^{-1} y$, applicando una trasformazione simmetrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante si ha:

- A) $y = \operatorname{arcsen} x$ oppure $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
 B) $y = \operatorname{arcsen} x$ oppure $y = \operatorname{cos}^{-1} x$
 C) $y = \operatorname{arctang} x$ oppure $y = \operatorname{tang}^{-1} x$

I cui grafici sono rispettivamente

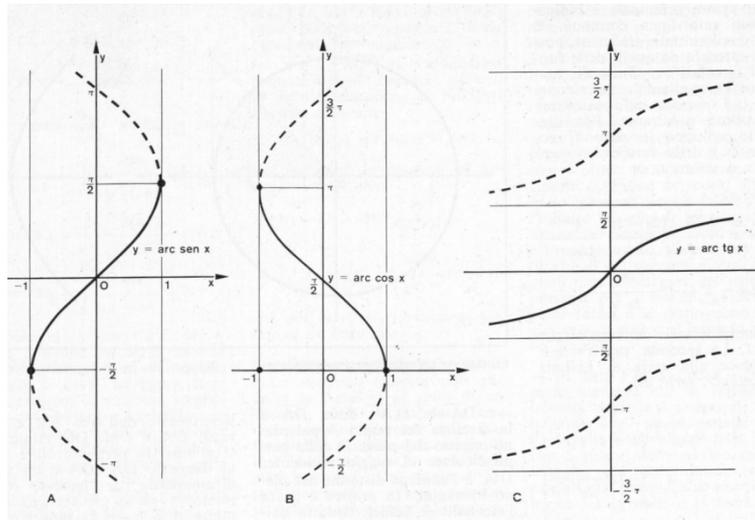


Fig. 22

FUNZIONI IPERBOLICHE

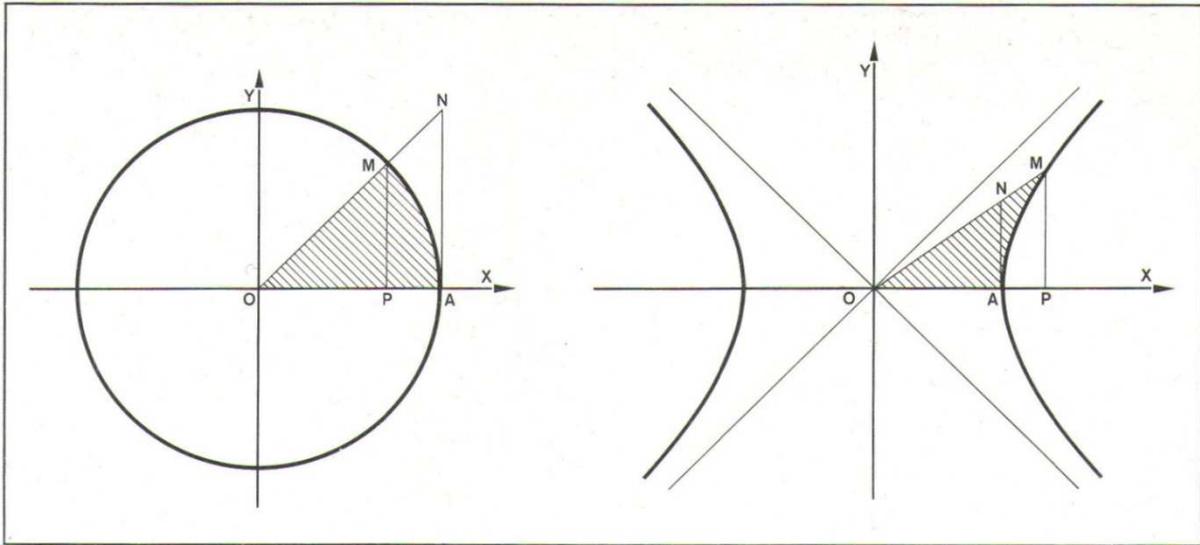


Fig. 23

Le funzioni iperboliche per molti aspetti sono analoghe alle funzioni circolari. Per definire le funzioni iperboliche si consideri l'iperbole equilatera unitaria

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Se M un punto di tale iperbole per definizione la misura, espressa in radianti, x dell'angolo iperbolico compreso tra i raggi OA ed OM è data dal doppio dell'area del settore iperbolico AOM, determinato dall'arco AM e dai raggi OA ed OM. Dal punto M si abbassi la perpendicolare MP al diametro OA (OA è un asse di simmetria per l'iperbole ed il punto A è il vertice: con $OA = 1$) dal punto A si tracci la tangente all'iperbole e si indichi con N la sua intersezione con il raggio OM. Le lunghezze dei segmenti PM, OP, e AN sono chiamate rispettivamente, rispettivamente il seno iperbolico, il coseno iperbolico e la tangente iperbolica dell'angolo iperbolico x e si indicano:

$$PM = \operatorname{senhx}, \quad OP = \operatorname{coshx} \quad \text{e} \quad AN = \operatorname{tanhx}$$

Si definiscono pure le funzioni reciproche come nelle funzioni circolari:

$$\frac{1}{PM} = \operatorname{cosechx}, \quad \frac{1}{OP} = \operatorname{sechx}, \quad \frac{1}{AN} = \operatorname{cotanhx}$$

Le funzioni iperboliche godono di proprietà analoghe a quelle delle funzioni circolari.

- Relazione fondamentale $\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
- $\operatorname{Tanhx} = \frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{coshx}}$
- $\operatorname{Cosechx} = \frac{1}{\operatorname{senhx}}$
- $\operatorname{Sechx} = \frac{1}{\operatorname{coshx}}$
- $\operatorname{Cotanhx} = \frac{1}{\operatorname{tanhx}}$

Le funzioni $y = \sinh x$ e $y = \tanh x$ sono funzioni dispari: $\sinh(-x) = -\sinh x$ e $\tanh(-x) = -\tanh x$; mentre la funzione $y = \cosh x$ è una funzione pari: $\cosh(-x) = \cosh x$.
Si hanno le formule di addizione

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Le formule di duplicazione

$$\begin{aligned}\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}\end{aligned}$$

Le formule di bisezione

$$\begin{aligned}\sinh \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \\ \cosh \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \\ \tanh \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}\end{aligned}$$

Le formule razionali o parametriche

Posto $\tanh \frac{x}{2} = t$, si ha

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{2t}{1 - t^2} \\ \cosh x &= \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\end{aligned}$$

Le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}\sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\ \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\ \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\ \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Le funzioni iperboliche sono legate alla funzione esponenziale dalla formula di Eulero:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

Dalla quale si deducono immediatamente le relazioni:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

I cui grafici sono rispettivamente

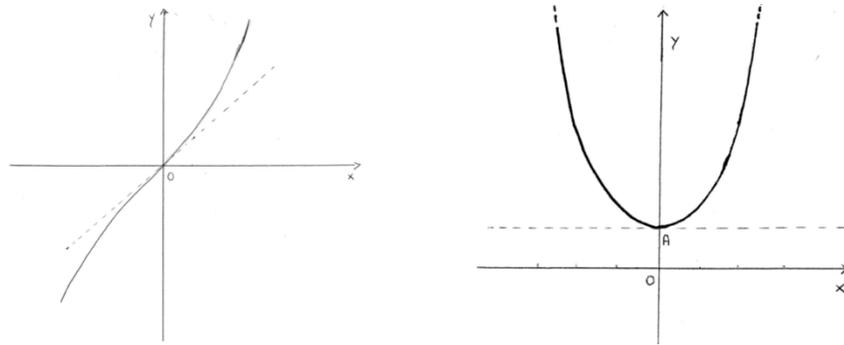
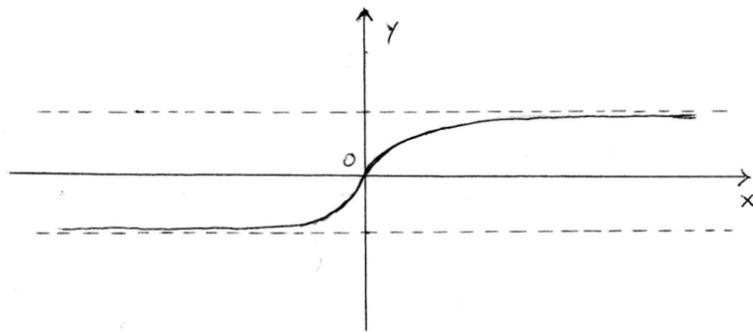


Fig. 24



Funzioni inverse iperboliche:

Per analogia alle funzioni circolari anche le funzioni iperboliche ammettono le funzioni inverse: esse si ricavano ponendo $y = \operatorname{senh} x \rightarrow x = \operatorname{setts}hy = \operatorname{senh}^{-1}y$, applicando una trasformazione simmetrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante si ha:

$$\begin{array}{lll} y = \operatorname{setts}hx & \text{oppure} & y = \operatorname{senh}^{-1}x \\ y = \operatorname{setts}hx & \text{oppure} & y = \operatorname{cosh}^{-1}x \\ y = \operatorname{setts}hx & \text{oppure} & y = \operatorname{tanh}^{-1}x \end{array}$$

tali funzioni sono definite anche da

$$\begin{array}{l} \text{A) } \operatorname{setts}hx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x \pm \sqrt{x^2+1}) \\ \text{B) } \operatorname{setts}hx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \\ \text{C) } \operatorname{setts}hx = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \end{array}$$

I cui grafici sono

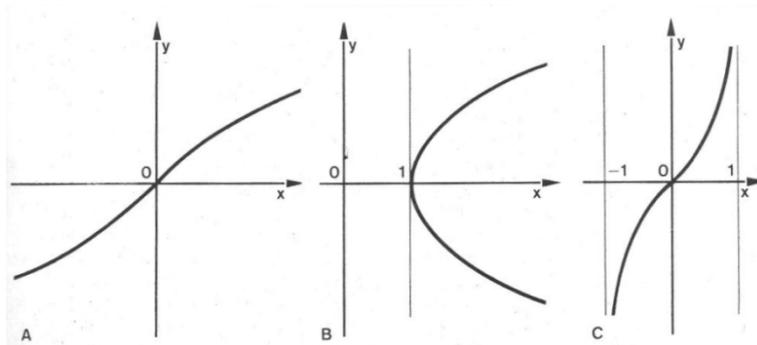


Fig. 25

6 COORDINATE E SISTEMA POLARE NEL PIANO

Coordinate polari:

I punti di un piano possono rappresentarsi non solo con le coordinate cartesiane, siano esse ortogonali che oblique come abbiamo visto nel III capitolo, ma anche con altri tipi di coordinate purché si scelgano opportuni sistemi di riferimento.

Fissati nel piano π un punto O , detto *polo*, una semiretta di origine O , detta *asse polare*, un verso positivo di rotazione (generalmente si prende il verso di rotazione antiorario) intorno al polo ed un segmento u come unità di misura:

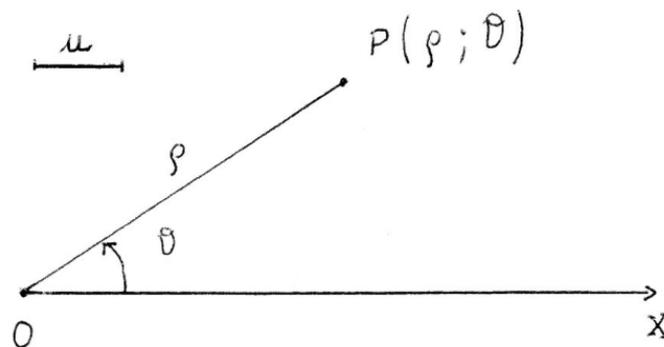


Fig. 26

un punto P del piano è completamente determinato dalla distanza ρ del punto dal polo, detta *modulo* in quanto essendo una distanza essa è sempre positiva o al più nulla, e dall'angolo ϑ , formato dall'asse polare e dal segmento OP : tale angolo è detta *anomalia*. L'angolo ϑ si misura in radianti e può essere positivo o negativo se l'asse polare nel descrivere l'angolo ϑ ruota in verso antiorario od orario.

Il modulo ρ e l'anomalia ϑ costituiscono le *coordinate polari* del punto P ; per indicare che un punto P ha coordinate polari ρ e ϑ si scrive $P(\rho; \vartheta)$: come le coordinate cartesiane anche queste coordinate sono numeri reali.

Affinché tra i punti del piano e le coppie di numeri reali $(\rho; \vartheta)$ esista una corrispondenza biunivoca, l'anomalia ϑ deve assumere solo valori compresi in un intervallo angolare uguale ad un angolo giro: cioè $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Infatti, in tal caso, ad ogni punto del piano, escluso il polo, corrisponde una coppia di valori ρ e ϑ e viceversa: ad ogni coppia di valori ρ e ϑ corrisponde uno ed un solo punto.

E' possibile trasformare le coordinate polari in coordinate cartesiane, basti riferire il sistema polare ad un sistema cartesiano in modo tale che il polo O coincida con l'origine O del sistema cartesiano, l'asse polare con il semiasse positivo delle ascisse e l'asse delle ordinate è perpendicolare all'asse polare nel suo polo, inoltre il verso di rotazione dei quadranti coincide con il verso di rotazione del sistema polare e l'unità u sia uguale nei due sistemi

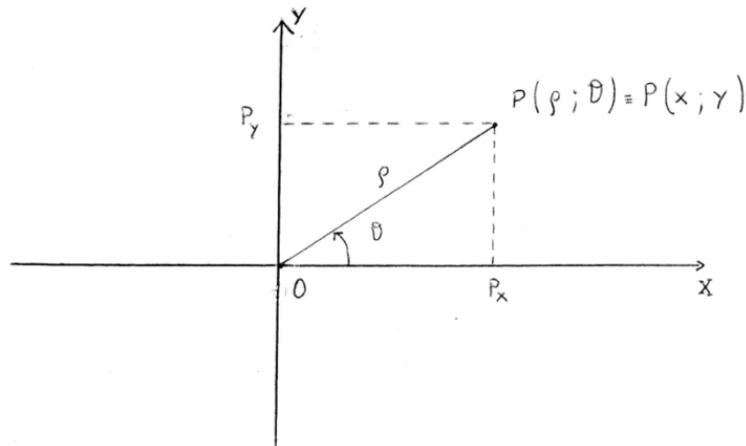


Fig. 27

Le coordinate polari sono legate alle coordinate cartesiane mediante le relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Mentre le coordinate cartesiane sono legate alle coordinate polari mediante le relazioni:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tag} \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Le coordinate polari, come le coordinate cartesiane, ci permettono di scrivere l'equazione di una curva piana: come insieme di punti che soddisfano a determinate relazioni matematiche che legano le coordinate ρ e ϑ , riferiti ad un determinato sistema di riferimento polare.

Pertanto trattando delle coniche per poter determinare la loro equazione polare facciamo riferimento alla proprietà che li accomuna: cioè

$$\frac{\overline{PF}}{d(P, d)} = e$$

La conica è l'insieme dei punti del piano tale che il rapporto tra la loro distanza dal fuoco e quella dalla direttrice sia costante e precisamente ad e , che costituisce l'eccentricità della conica.

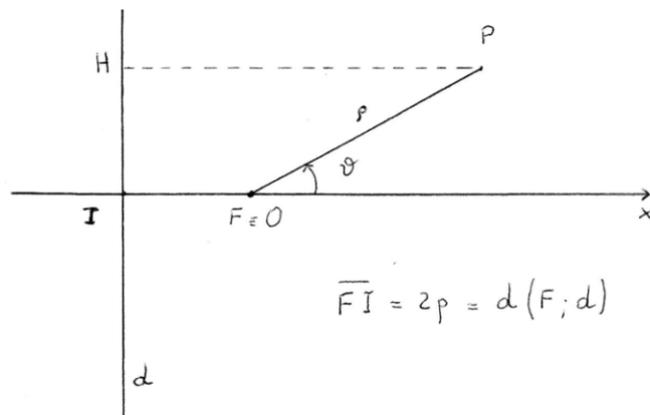


Fig. 28

Siano F e d rispettivamente il fuoco e la direttrice della conica. Fissiamo un sistema di riferimento polare e precisamente sia F il polo, la semiretta uscente da F , che non interseca la direttrice e che la sua retta sostegno sia perpendicolare alla direttrice, sia l'asse polare, sia $2p$ la distanza del fuoco

dalla direttrice, ogni punto P della conica sia determinato dalla sua distanza ρ dal fuoco e dall'anomalia ϑ : l'angolo formato dall'asse polare e dal segmento che unisce P al fuoco.

Trasformiamo ora la proprietà geometrica della conica in una relazione matematica fra le coordinate polari dei punti P ; calcoliamo le due distanze PF e d (P ; d) :

$$PF = \rho \quad e \quad PH = d (P ; d) = 2p + \rho \cos\vartheta$$

Sostituiamo nella relazione e otteniamo la relazione matematica cercata:

$$\frac{\rho}{2p + \rho \cos\vartheta} = e$$

Operando ed esplicitando rispetto a ρ si ricava:

$$\rho = \frac{2pe}{1 + e\cos\vartheta}$$

Che è l'equazione della conica, con le usuali condizioni:

- Se $e < 1$ si ha l'equazione dell'ellisse
- Se $e = 1$ si ha l'equazione della parabola
- Se $e > 1$ si ha l'equazione della parabola

Le coordinate polari del fuoco sono $F (0 ; \vartheta)$, mentre l'equazione della direttrice è $\rho = -\frac{2p}{\cos\vartheta}$

Fissiamo ancora in F il centro del sistema di riferimento cartesiano, la retta sostegno dell'asse polare sia l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate sia la retta perpendicolare in F all'asse polare. Stabilito questo trasformiamo in coordinate cartesiane: $PF = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $PH = x + 2p$, la relazione diventa:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + 2p} = e$$

Elevando al quadrato e sviluppando i calcoli si ha:

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 4e^2px + 4e^2p^2$$

$$(1 - e^2)x^2 - 4e^2px + y^2 - 4e^2p^2 = 0$$

Questa è l'equazione cartesiana della conica. Ora distinguiamo due casi: coniche a centro e coniche non a centro:

a) Caso della parabola o della conica non a centro $e = 1$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$y^2 - 4px - 4p^2 = 0$$

$$y^2 - 4p(x + p) = 0$$

Posto $\begin{cases} X = x + p \\ Y = y \end{cases}$, si ha, esplicitando rispetto alla x : $X = \frac{1}{4p} Y^2$, che risulta l'equazione canonica della parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse.

b) Caso dell'ellisse e dell'iperbole o delle coniche non a centro: $e \leq 1$.

Dividiamo l'equazione $(1 - e^2)x^2 - 4e^2px + y^2 - 4e^2p^2 = 0$ per $(1 - e^2)$ e otteniamo

$$x^2 - \frac{4e^2p}{(1-e^2)}x + \frac{y^2}{(1-e^2)} - \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)} = 0$$

Aggiungo e sottraggo la stessa quantità al primo membro dell'equazione:

$$x^2 - \frac{4e^2p}{(1-e^2)}x + \frac{4e^4p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{4e^4p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)} - \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)} = 0$$

Il primo trinomio è lo sviluppo di un quadrato, pertanto

$$\left(x - \frac{2e^2p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{4e^4p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)}$$

Raccolgo al secondo membro

$$\left(x - \frac{2e^2p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}(e^2 + 1 - e^2)$$

Da cui

$$\left(x - \frac{2e^2p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}$$

Posto

$$\begin{cases} X = x - \frac{2e^2p}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases}$$

Si ha

$$X^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}$$

Divido ambo i termini per $\frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}$

$$\frac{X^2}{\frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{4e^2p^2}{1-e^2}} = 1$$

Per $e > 1$ pongo $a^2 = \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ e $-b^2 = \frac{4e^2p^2}{1-e^2}$, sostituisco e ottengo l'equazione canonica dell'iperbole:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Per $e < 1$ pongo $a^2 = \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ e $b^2 = \frac{4e^2p^2}{1-e^2}$, sostituisco e ottengo l'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pertanto l'impostazione polare e quella cartesiana, riferiti a sistemi di riferimento sovrapposti, coincidono, solo che l'impostazione polare è più compatta rispetto a quella cartesiana.

7 Coordinate parametriche:

In generale una curva del piano può essere determinata esprimendo le coordinate, siano esse cartesiane che polari, in funzione di un parametro variabile: cosa d'altronde già incontrata in geometria analitica della retta reale quando si vuole determinare l'ascissa del punto di un segmento di estremi $A(x_0)$ e $B(x_1)$: infatti se x è l'ascissa del punto P del segmento AB il suo valore è:

$$x = tx_0 + (1-t)x_1$$

con $t \in [0; 1]$.

Se con t indichiamo il parametro e l'equazione della curva è di tipo cartesiano: cioè $F(x; y) = 0$. Il seguente sistema rappresenta l'*equazione parametrica di tipo cartesiano*:

$$\begin{cases} x = h(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

dove h e g sono l'insieme delle operazioni algebriche che legano il parametro t alle coordinate x ed y contemporaneamente; se l'equazione della curva è di tipo polare: cioè $F(\rho; \vartheta) = 0$, il seguente sistema rappresenta l'*equazione parametrica di tipo polare*:

$$\begin{cases} \rho = \varphi(t) \\ \vartheta = \omega(t) \end{cases}$$

dove φ e ω sono l'insieme delle operazioni sia algebriche che goniometriche che legano il parametro t alle coordinate polari ρ e ϑ .

Per ridurre alla forma cartesiana o alla forma polare l'equazione parametrica si applica il metodo, detto dell'*eliminazione del parametro*, che consiste nel ricavare il parametro da una delle due equazioni presenti nel sistema parametrico e sostituirlo nell'altra equazione.

L'*equazione parametrica* ha un ruolo fondamentale in Fisica, quando si studiano i moti bidimensionali: infatti il principio della indipendenza dei moti lungo due direzioni in cui si sviluppa

il moto di un punto materiale consiste nell'analisi delle equazioni di un sistema parametrico, dove il parametro in questo contesto è il tempo. Vista pertanto l'importanza dell'argomento diamo qui le equazioni parametriche delle coniche, partendo dalle equazioni canoniche per le coniche a centro e per la parabola dall'equazione normale:

Circonferenza: $x^2 + y^2 = r^2$ la sua equazione parametrica di tipo polare è: $\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}$

Dove r è il raggio della circonferenza. Tale equazione soddisfa l'equazione canonica: infatti sostituendo si ha: $r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t) = r^2$, dividendo ambo i membri dell'uguaglianza per r^2 si ha la nota formula di goniometria $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Pertanto il sistema parametrico è ben impostato.

Ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ la sua equazione parametrica di tipo polare è: $\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases}$

dove a e b sono i semiassi dell'ellisse. Tale equazione soddisfa l'equazione canonica: infatti sostituendo si ha: $\frac{a^2 \cdot \cos^2(t)}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2(t)}{b^2} = 1$, semplificando si ha la nota formula goniometrica $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Pertanto il sistema parametrico è ben impostato.

Parabola: $y = ax^2 + bx + c$ la sua equazione parametrica di tipo cartesiano è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 + bt + c \end{cases}$$

Tale equazione soddisfa l'equazione normale basti sostituire nella seconda equazione del sistema parametrico al posto della t la x .

Iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ la sua equazione parametrica di tipo polare è:

$$\begin{cases} x = a/\cos(t) \\ y = b \cdot \tan(t) \end{cases}$$

Dove a e b sono i semiassi dell'iperbole. Tale equazione soddisfa l'equazione canonica: infatti

Sostituendo si ha: $\frac{a^2}{a^2 \cos^2(t)} - b^2 \tan^2(t) = 1$, sapendo che $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ e sostituendo si ha

$$\frac{a^2}{a^2 \cos^2(t)} - \frac{b^2 \sin^2(t)}{b^2 \cos^2(t)} = 1, \text{ semplificando e facendo il m.c.m al primo membro si ha } \frac{1 - \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1,$$

per la formula $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$, sostituendo si ha $\frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)} = 1$, semplificando si ha l'identità:

$1 = 1$. Pertanto il sistema parametrico è ben impostato.

Trasformazione del piano in sé – Trasformazione dell'equazione di una conica dalla forma canonica alla forma generale e viceversa

1 Trasformazione del piano in sé :

Caratteri generali

Def. 1) Dati due insiemi X ed Y e considerata una qualunque relazione f fra i due insiemi, si dice che f è una corrispondenza biunivoca tra X ed Y se ad ogni elemento x di X essa fa corrispondere uno ed un solo elemento y di Y e ad ogni elemento y di Y fa corrispondere uno ed un solo elemento x di X .

Si dimostra in Algebra Astratta che tutte le relazioni biunivoche sono invertibili: cioè ammettono la relazione inversa. Se f è la relazione biunivoca tra X e Y : cioè se $x \in X \rightarrow y = f(x) \in Y$, allora esiste f^{-1} tale che se $y \in Y \rightarrow x = f^{-1}(y) \in X$. Possiamo anche affermare che $f^{-1} * f(x) = x$

Def. 2). Si chiama trasformazione geometrica del piano in sé una corrispondenza biunivoca che associa a punti di un piano punti dello stesso piano.

Se con f si indica una trasformazione geometrica del piano in sé, allora al punto P essa fa corrispondere il punto $P' = f(P)$: il punto P' è detto il *corrispondente* o *immagine* o *trasformato* di P (con P e P' punti dello stesso piano) .

Se γ è una figura geometrica del piano π i cui punti, in una trasformazione f , sono posti in corrispondenza biunivoca con punti dello stesso piano π , allora l'insieme di questi punti corrispondenti costituiscono la figura immagine di γ e si indica con $\gamma' = f(\gamma)$.

Possiamo anche dire che γ' è la figura trasformata di γ mediante f .

Def. 3) In una trasformazione del piano in sé un punto si dice punto unito se il trasformato di esso coincide col punto stesso: cioè $P = f(P)$

Def. 4) In una trasformazione del piano in sé una figura si dice unita se la figura trasformata coincide con la figura stessa: cioè $\gamma = f(\gamma)$.

Def. 5) In una trasformazione del piano in sé una figura si dice fissa se la figura trasformata coincide con la figura stessa ed è costituita da punti uniti.

Se f è una trasformazione tale che $f(P) = P'$ et $f(P') = P$, si dice che la trasformazione f è una *trasformazione involutoria*

Se il verso di percorrenza del contorno di una figura e della sua immagine tramite f è concorde, allora la trasformazione si dice *trasformazione diretta*; se il verso è discorde allora la trasformazione si dice *trasformazione invertente*.

Equazione di una trasformazione del piano in sé

Se ora si consideri un piano cartesiano: cioè un piano dove si è stabilito un sistema di coordinate ortogonali, ogni suo punto P è determinato da due coordinate: l'ascissa x_p e l'ordinata y_p : cioè $P(x_p; y_p)$; e, se su questo piano si applica una trasformazione $f(f_1; f_2)$, questa fa corrispondere a P il punto P' di coordinate $\overline{x_{p'}}$ e $\overline{y_{p'}}$ con

$$1) \begin{cases} \overline{x_{p'}} = f_1(x_p; y_p) \\ \overline{y_{p'}} = f_2(x_p; y_p) \end{cases}$$

La trasformazione $f(f_1; f_2)$ provoca un cambio di coordinate: la f in questo contesto è l'insieme delle operazioni matematiche che operano sulle coordinate x_p e y_p . Se si fa variare P di conseguenza varia anche P' ; P descriverà una figura geometrica γ e di conseguenza P' descriverà la figura geometrica immagine di γ : cioè γ' . Il sistema analitico 1) permette di trovare l'immagine di un punto P tramite f . Poiché f è una corrispondenza biunivoca, esiste la sua inversa: cioè quella trasformazione che composta con f dà la trasformazione identità $I: f \circ f^{-1} = I$: tale trasformazione permette di trasformare il punto P' in P

$$2) \begin{cases} x_p = f_1^{-1}(\overline{x_{p'}}; \overline{y_{p'}}) \\ y_p = f_2^{-1}(\overline{x_{p'}}; \overline{y_{p'}}) \end{cases}$$

Anziché trasformare i punti del piano e considerare “fisso” il sistema di riferimento, è possibile ragionare “al contrario”: non si parla allora di trasformazione di punti del piano, ma di cambio di riferimento. Anziché considerare la trasformazione che mette in corrispondenza biunivoca punti distinti del piano P e P' , si potrebbe, fermi restanti i punti del piano, riferire questi a due sistemi di riferimenti diversi, i cui assi sono in corrispondenza biunivoca mediante la trasformazione. Dal punto di vista operativo le due impostazioni sono equivalenti: cioè provocano lo stessa situazione grafica sul piano.

Se si pensa ad una trasformazione come ad un “cambiamento di riferimento” e non come ad una trasformazione di punti, le sue equazioni si scrivono come per la trasformazione inversa: tipo 2). Questa tipo di impostazione è utile quando bisogna operare una trasformazione su figure geometriche nel loro complesso, costituite da infiniti punti. Pertanto scriveremo in modo formale le trasformazioni in questo modo:

$$T \equiv \begin{cases} x' = f_1(x; y) \\ y' = f_2(x; y) \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow f_1^{-1}(x'; y') \\ y \rightarrow f_2^{-1}(x'; y') \end{cases}$$

La parte superiore è il sistema che definisce la trasformazione per punti, mentre la parte inferiore è il sistema relativo al trasformazione come “cambiamento di riferimento”.

Invariante di una trasformazione

Nell'applicare una trasformazione del piano in sé ad una figura geometrica può capitare che tale trasformazione fa rimanere inalterate alcune caratteristiche o proprietà della figura: cioè nella figura immagine si ripresentano con le stesse modalità quelle caratteristiche o proprietà della figura primitiva. Tali caratteristiche o proprietà si dicono *invarianti della trasformazione*.

L'insieme di tali invarianti costituisce la base per definire una determinata trasformazione e nello stesso tempo a classificare le diverse trasformazioni

Analizziamo ora le diverse trasformazioni :

2 Trasformazioni isometriche

In Geometria elementare abbiamo studiato i movimenti rigidi del piano, che applicati a due punti qualunque del piano non fanno cambiare la distanza tra i punti. Questo fatto è possibile se pensiamo gli enti geometrici ancora in termini euclidei: cioè pensare di sovrapporre sul piano dei punti un foglio trasparente e di tracciare su questo i due punti da muovere, successivamente far scivolare il foglio sul piano e tracciare sul piano la nuova posizione dei punti e quindi misurare la distanza prima e dopo il movimento. Ora la posizione finale è costituita da punti del piano diversi da quei punti iniziali, questo fatto con l'avvento della geometria razionale ha indotto i matematici ad introdurre la relazione di congruenza fra segmenti o tra figure in generale nel caso che è possibile porre una corrispondenza biunivoca fra i punti delle figure, che con un movimento rigido del piano si sovrappongono. La relazione di congruenza afferma che le figure sono distinte nel piano in quanto sono formati da punti del piano diversi, tuttavia tutte le proprietà geometriche riscontrabili nella figura primitiva sono riscontrabili nella figura immagine. Porre una corrispondenza biunivoca fra punti dello stesso piano significa per definizione introdurre il concetto di trasformazione del piano in sé. Poiché una delle proprietà geometriche caratterizzante la congruenza è quella di mantenere le distanze fra punti, i matematici coniarono il termine di isometria. Pertanto in questo contesto congruenza ed isometria sono equivalenti.

Def. 6) Si chiama trasformazione isometrica la trasformazione del piano in sé che , comunque si scelgono due punti A e B del piano, se A' e B' sono i loro corrispondenti, allora

$$d(A; B) = d(A'; B')$$

Proprietà invarianti

- 1) L'isometria conserva le distanze fra punti corrispondenti
- 2) L'isometria conserva l'ampiezza degli angoli corrispondenti
- 3) L'isometria conserva il parallelismo: a rette parallele corrispondono rette parallele
- 4) L'isometria conserva la perpendicolarità: a rette perpendicolari corrispondono rette perpendicolari
- 5) L'isometria trasforma una figura in una figura ad essa congruente

Equazione generale dell'isometria:

Dall'analisi dei sistemi dei diversi tipi di trasformazione isometrica si può individuare una caratteristica algebrica comune che permette di individuare il sistema generale a cui sono riconducibili i diversi sistemi delle diverse particolari isometrie e precisamente:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} ad - bc = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow dx - by - (dp - bq) \\ y \rightarrow -cx + ay + (cp - aq) \end{array} \right.$$

Pertanto una trasformazione del tipo sopra esposta con le condizioni a fianco indicate è l'equazione di una trasformazione isometrica del piano in sé.

Principali tipi di trasformazioni isometriche:

1) Identità

Def. 7) La trasformazione identità è la trasformazione del piano in sé che fa corrispondere ad ogni punto del piano il punto stesso e ad ogni figura la figura stessa.

Proprietà:

- 1) L'identità è una trasformazione isometrica
- 2) L'identità è una trasformazione *involutoria* : $I \circ I = I$
- 3) L'identità è costituita da elementi *uniti* : *punti e figure fisse*

Equazioni

Nel piano cartesiano i sistemi che determinano tale trasformazione sono

$$\mathbf{I} = \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ \parallel x \rightarrow x \\ \parallel y \rightarrow y \end{cases}$$

2) Simmetria centrale: S_O , con O centro di simmetria

Fissato nel piano un punto O , un punto P' si dice simmetrico di P rispetto ad O se il punto O è il punto medio del segmento PP' .

Def. 7) Si chiama simmetria centrale di centro O la trasformazione del piano in sé che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' simmetrico di P rispetto ad O

Proprietà:

-) La simmetria centrale è una trasformazione isometrica
-) La simmetria centrale è una trasformazione involutoria : $S_O \circ S_O = I$
-) La simmetria centrale trasforma rette in rette:
 - a) Se le rette sono incidenti anche le rette immagine sono incidenti, se in particolare la retta r passa per O allora la retta immagine r' coincide con r .
-) Una figura ammette centro di simmetria se è una figura unita

Equazioni:

Tenendo conto che O è il punto medio del segmento avente per estremi i punti corrisponden-

ti e ricordando che sull'asse reale il punto medio ha ascissa $x_M = \frac{x_2 + x_1}{2}$, per determinare x_2 basti ricavarlo con semplici passaggi algebrici da tale formula: $x_2 = 2x_M - x_1$. Questa formula permette di ricavare i sistemi che determinano la trasformazione centrale S_O , relativamente ad un sistema di assi cartesiani

$$S_O = \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow 2x_0 - x \\ y \rightarrow 2y_0 - y \end{cases}$$

3) Simmetria assiale: S_a , con la retta a asse della simmetria

Def. 8) Fissata in un piano una retta a , si chiama simmetria assiale di asse a la trasformazione del piano in sé che ad ogni punto P del piano fa corrispondere un punto P' tale che

· se $P \in a$, allora $P \equiv P'$

· se $P \notin a$, allora a è l'asse del segmento PP'

Proprietà:

-) La simmetria assiale è una trasformazione isometrica
-) La simmetria assiale è una trasformazione involutoria: $S_a \circ S_a = I$
-) La simmetria assiale trasforma rette in rette:
 - a) Una retta e la sua immagine si intersecano in un punto dell'asse a
 - b) Se una retta è parallela all'asse a , allora anche la sua immagine è parallela all'asse a
 - c) Se una retta è perpendicolare all'asse, la sua immagine coincide con la retta stessa: cioè le rette perpendicolari all'asse a sono rette unite.
 - b) Se le rette sono incidenti anche le rette immagine sono incidenti,
-) Una figura piana ammette asse di simmetria se è una figura unita

Equazioni:

Tenendo conto della definizione che l'asse di simmetria a è asse del segmento di due punti corrispondenti nella trasformazione assiale, tenendo conto altresì che tale segmento è perpendicolare ad a , si può affermare che il punto di intersezione tra tale segmento e l'asse risulta punto medio del segmento stesso. Sfruttando questa considerazione possiamo impostare il calcolo algebrico per determinare i sistemi che determinano la trasformazione. Sia data l'equazione dell'asse a in un piano cartesiano e un punto P :

$$a \equiv y = mx + q \quad \text{e} \quad P(x_p; y_p)$$

Si consideri la retta perpendicolare ad a passante per P : $t \equiv y = -\frac{1}{m}(x - x_p) + y_p$, sia $P'(x'; y')$ il punto simmetrico di P rispetto ad a M il punto medio del segmento PP' . Per quanto detto sopra il punto M deve appartenere sia ad a che a t . Le coordinate di M

sono $x_m = \frac{x' + x_p}{2}$ e $y_m = \frac{y' + y_p}{2}$, sostituendo in **a** ed in **t** si ottiene il sistema risolvente:

$$\begin{cases} \frac{y' + y_p}{2} = m \frac{x' + x_p}{2} + q \\ \frac{y' + y_p}{2} = -\frac{1}{m} \left(\frac{x' + x_p}{2} - x_p \right) + y_p \end{cases}$$

Operando algebricamente si ha

$$\begin{cases} y' + y_p = m(x' + x_p) + 2q \\ m(y' + y_p) = x_p - x' + 2my_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + y_p = m(x' + x_p) + 2q \\ m^2 x' + m^2 x_p + 2mq = x_p - x' + 2my_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + y_p = m(x' + x_p) + 2q \\ x' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} x_p + \frac{2m}{1 + m^2} (y_p - q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{2m}{1 + m^2} x_p - \frac{1 - m^2}{1 + m^2} y_p + \frac{2q}{1 + m^2} \\ x' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} x_p + \frac{2m}{1 + m^2} (y_p - q) \end{cases}$$

Generalizzando, si ha il sistema risolvente che definisce la trasformazione assiale

$$\begin{cases} y' = \frac{2m}{1 + m^2} x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2} y + \frac{2q}{1 + m^2} \\ x' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} x + \frac{2m}{1 + m^2} (y - q) \end{cases}$$

La cui inversa coincide con lo stesso sistema, pertanto possiamo scrivere:

$$S_a = \begin{cases} x' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} x + \frac{2m}{1 + m^2} (y - q) \\ y' = \frac{2m}{1 + m^2} x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2} y + \frac{2q}{1 + m^2} \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1 - m^2}{1 + m^2} x + \frac{2m}{1 + m^2} (y - q) \\ y \rightarrow \frac{2m}{1 + m^2} x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2} y + \frac{2q}{1 + m^2} \end{array} \right.$$

4) *Traslazione di vettore \vec{v} : $T\vec{v}$*

Nel secondo capitolo abbiamo introdotto il concetto di segmento orientato: cioè quel segmento su cui è stato definito un verso di percorrenza. Ora se in un piano si considera un segmento orientato AB, ogni altro segmento congruente ad esso, avente la stessa direzione (la retta sostegno è parallela o coincide con la retta sostegno di AB) e lo stesso verso, si dice *segmento equipollente* ad AB. Ora la relazione di equipollenza dalla Teoria degli insiemi è una relazione di equivalenza e pertanto ripartisce i segmenti del piano in classi di equivalenza: ogni classe è caratterizzata da segmenti equipollenti. Ogni segmento della classe funge da rappresentante della classe, a tale rappresentante si dà nome di *vettore* e lo si indica con \overrightarrow{AB} oppure \vec{v} . Gli estremi del segmento AB si dicono A *origine o punto di applicazione* del vettore e B *termine* del vettore se il verso del segmento va da A a B.

Per sommare due vettori di un piano si pongono consecutivamente due vettori equipollenti ai dati in modo che il termine del primo vettore coincide con l'origine del secondo: il vettore somma è quello che ha origine nell'origine del primo vettore e il termine nel termine del secondo vettore.

Fissato nel piano un vettore \vec{v} , se ad un punto P del piano si applica il vettore, il termine di tale vettore è un punto P' dello stesso piano, pertanto il vettore fa corrispondere a P il punto P', invertendo il verso del vettore il punto P' diventa origine o punto di applicazione e P termine del vettore: cioè a P' corrisponde P, ne deriva che tramite il vettore si è posto fra i punti dello stesso piano una corrispondenza biunivoca del piano in sé: cioè il vettore definisce una trasformazione e precisamente una traslazione, di qui la definizione

Def. 9) Si chiama traslazione di vettore \vec{v} la trasformazione del piano in sé tale che detti P e P' i corrispondenti si verifica che $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

Proprietà:

-) La traslazione è una trasformazione isometrica
-) La traslazione non è una trasformazione involutoria : $T\vec{v} \circ T\vec{v} \neq I$
-) La traslazione trasforma rette in rette:
 - a) L'immagine di una retta r è una retta r' parallela ad r
-) La traslazione di vettore diverso dal vettore nullo non ha punti uniti

Equazione:

Sia dato sul piano un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, sia O il punto di applicazione dei vettori del piano; ogni vettore sul piano cartesiano è univocamente determinato dalle coordinate del termine del vettore: $\vec{v}(\alpha; \beta)$. Il sistema che definisce la traslazione nel piano cartesiano è determinato dalla relazione $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Proiettando il segmento PP' prima sull'asse delle ascisse e successivamente sull'asse delle ordinate: la differenza delle ascisse e delle ordinate dei due punti devono essere uguali all'ascissa e all'ordinata: $x' - x = \alpha$ e $y' - y = \beta$, del vettore: pertanto il sistema risolvibile è

$$T\vec{v} = \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow x - \alpha \\ y \rightarrow y - \beta \end{cases}$$

5) Rotazione ρ_O^α

Sia \mathcal{C} una circonferenza del piano π di centro O e sia A un suo punto di \mathcal{C} , fissato su tale circonferenza un verso di percorrenza ogni altro punto di \mathcal{C} segue o precede il punto A . Sia positivo il verso antiorario e negativo il verso orario. L'arco AB si dice orientato positivamente se segue A nel verso antiorario altrimenti è negativo. Dalla geometria elementare si sa che ad ogni arco corrisponde un angolo al centro: all'arco AB corrisponde l'angolo \widehat{AOB} . Se AB ha un verso anche l'angolo \widehat{AOB} ha lo stesso verso di AB , in questo modo sul piano si è stabilito un verso di percorrenza e gli angoli su di esso si dicono orientati.

Def. 10) Fissato su un piano un punto O ed un angolo α orientato, si chiama rotazione di centro O e ampiezza α la trasformazione del piano in sé che associa al punto P il punto P' in modo tale che

-) se $P \neq O$, allora $\widehat{POP'} = \alpha$ e $OP' = OP$
-) se $P = O$, allora $P' \equiv P \equiv O$

Proprietà:

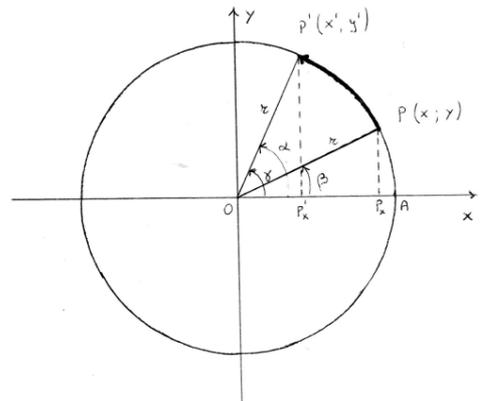
-) La rotazione è una trasformazione isometrica
-) La rotazione non è in generale una trasformazione involutoria: $\rho_O^\alpha \circ \rho_O^\alpha \neq I$
-) La rotazione trasforma rette in rette:
 - b) L'immagine di una retta r , passante per O , è una retta r' passante ancora per O tale che $\widehat{rr'} = \alpha$
-) Il punto O centro di rotazione è l'unico punto unito

Equazioni:

Sia dato sul piano un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy , sia $P(x_p; y_p)$ un punto di tale piano. Applicando una rotazione di centro O e ampiezza α , si vuol determinare l'immagine P' di P di tale trasformazione. Tale punto P' deve appartenere alla circonferenza di centro O e raggio $r = OP$ tale che $\widehat{AOP'} = \alpha$.

Consideriamo sul piano cartesiano la circonferenza \mathcal{C} di centro O e raggio r , questa interseca il semiasse delle ascisse positive in A , fissato su \mathcal{C} il verso antiorario di percorrenza come positivo, è univocamente determinato l'arco AP . All'arco AP sottende l'angolo al centro β .

Sia P_x la proiezione di P sull'asse delle ascisse, il triangolo OP_xP è un triangolo rettangolo, applicando a questo i teoremi di trigonometria si ha che



$OP_x = OP \cos \beta$ e $P_xP = OP \sin \beta$, ma OP_x è l'ascissa di P: $x_p = OP_x$, e P_xP è l'ordinata di P: $y_p = P_xP$; essendo $OP = r$, le coordinate di P sono $P (r \cos \beta ; r \sin \beta)$. Analogo ragionamento per il punto P', se l'angolo $\widehat{AOP'} = \gamma$ allora le coordinate di P' sono $P' (r \cos \gamma ; r \sin \gamma)$, dove $\gamma = \beta + \alpha$. Consideriamo le seguenti identità goniometriche

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \gamma = r \cos(\beta + \alpha) = r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha = x_p \cos \alpha - y_p \sin \alpha \\ y' &= r \sin \gamma = r \sin(\beta + \alpha) = r \sin \beta \cos \alpha + r \cos \beta \sin \alpha = y_p \cos \alpha + x_p \sin \alpha \end{aligned}$$

generalizzando e trovando con semplici calcoli algebrici le relazioni inverse, si ha il sistema che definisce tale trasformazione:

$$\rho_O^\alpha = \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \parallel \\ x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \parallel \\ y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{array}$$

Composizione di trasformazioni isometriche

Diamo per dimostrato il seguente teorema: “ Il prodotto o composizione di due isometrie è un'isometria.”

Alcuni prodotti di isometrie assumono nomi particolari:

Glissosimmetria: La glissosimmetria è il prodotto o composizione di una traslazione con una simmetria assiale, il cui asse ha la stessa direzione della traslazione

Rototraslazione: La rototraslazione è il prodotto o la composizione di una traslazione per una rotazione di centro O e ampiezza α

Ruolo della simmetria assiale

Tra le trasformazioni isometriche precedentemente esposte assume un ruolo fondamentale la simmetria assiale, infatti componendo opportunamente due simmetrie assiali si ottengono tutte le altre trasformazioni.

- 1) Il prodotto o composizione di due simmetrie assiali con assi coincidenti è un'identità.
- 2) Il prodotto o la composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari è una simmetria centrale, il cui centro coincide con il punto di intersezione dei due assi.
- 3) Il prodotto o la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione avente direzione ortogonale ai due assi verso da **a** a **b**, se il prodotto è $S_b \circ S_a$, e modulo uguale al doppio della distanza dei due assi **a** e **b**.
- 4) Il prodotto o la composizione di due simmetrie assiali ad assi incidenti è una rotazione avente il centro nel punto di intersezione dei due assi **a** e **b** ed ampiezza uguale al doppio dell'ampiezza dell'angolo formato dai due assi **a** e **b**.

3 CONICHE ISOMETRICHE

Nel secondo capitolo abbiamo introdotto le coniche canoniche, in questa sezione applichiamo alle equazioni canoniche delle diverse coniche le trasformazioni isometriche ottenendo così nuove equazioni di coniche congruenti alle coniche canoniche: quello che cambia rispetto al sistema di riferimento e la diversa collocazione sul piano cartesiano del grafico della conica canonica.

Ellisse dalla forma canonica alla forma generale .

Equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) Simmetria centrale S_C , con C centro di simmetria:

-) *Equazione*

Sia $C(\alpha; \beta)$ le coordinate del centro di simmetria, andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate: $\begin{cases} x \rightarrow 2\alpha - x \\ y \rightarrow 2\beta - y \end{cases}$

$$\frac{(2\alpha - x)^2}{a^2} + \frac{(2\beta - y)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente ne deriva

$$4b^2\alpha^2 - 4b^2\alpha x + b^2x^2 + 4a^2\beta^2 - 4a^2\beta y + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Ordinando, si ha

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 4b^2\alpha x - 4a^2\beta y + 4b^2\alpha^2 + 4a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

Posto

$$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -4b^2\alpha, \quad E = -4a^2\beta, \quad F = 4b^2\alpha^2 + 4a^2\beta^2 - a^2b^2$$

Si ottiene l'equazione dell'ellisse isometrica :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2) Simmetria assiale S_a , con la retta $a \equiv y = mx + q$ asse della simmetria

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q) \\ y \rightarrow \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{cases}$$

Si ha:

$$\frac{\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q)\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2}\right)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente:

$$[b^2(1-m^2)^2 + 4a^2m^2]x^2 + 4m(1-m^2)(b^2-a^2)xy + [4b^2m^2 + a^2(1-m^2)^2]y^2 + [8a^2mq - 4b^2mq(1-m^2)]x + [-8b^2m^2q - 4a^2q(1-m^2)]y + [4b^2m^2q^2 + 4a^2q^2 - a^2b^2(1+m^2)^2] = 0$$

Posto in questa equazione:

$$\begin{aligned} A &= [b^2(1-m^2)^2 + 4a^2m^2] & ; & \quad B = 4m(1-m^2)(b^2-a^2) \\ C &= [4b^2m^2 + a^2(1-m^2)^2] & ; & \quad D = [8a^2mq - 4b^2mq(1-m^2)] \\ E &= [-8b^2m^2q - 4a^2q(1-m^2)] & ; & \quad F = 4b^2m^2q^2 + 4a^2q^2 - a^2b^2(1+m^2)^2 \end{aligned}$$

e sostituendo in essa, si ottiene l'equazione dell'ellisse isometrica :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

3) *Traslazione di vettore* $\vec{v}(\alpha; \beta)$: $T\vec{v}$

-) *Equazione:*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate: $\begin{cases} x \rightarrow x-\alpha \\ y \rightarrow y-\beta \end{cases}$

Si ha

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente:

$$b^2x^2 - 2b^2\alpha x + b^2\alpha^2 + a^2y^2 - 2a^2\beta y + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

Ordinando, si ha

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2\alpha x - 2a^2\beta y + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

Posto in questa equazione

$$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2\alpha, \quad E = -2a^2\beta, \quad F = b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2$$

e sostituendo in essa, si ottiene l'equazione dell'ellisse isometrica :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Di particolare interesse è l'equazione di questa ellisse, in quanto i suoi assi sono paralleli agli assi cartesiani, le cui equazioni sono

$$x = -\frac{D}{2A} \quad e \quad y = -\frac{E}{2C}$$

Mentre le coordinate del suo centro sono $C\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

4) **Rotazione:** ρ_O^α

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate

$$\begin{cases} x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Si ha:

$$\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}{a^2} + \frac{(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente, si ha

$$b^2 x^2 \cos^2 \alpha + 2b^2 x y \cos \alpha \sin \alpha + b^2 y^2 \sin^2 \alpha + a^2 x^2 \sin^2 \alpha - 2a^2 x y \sin \alpha \cos \alpha + a^2 y^2 \cos^2 \alpha - a^2 b^2 = 0$$

Ordinando e tenendo conto delle formule di goniometria, si ha

$$(b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) x^2 + (b^2 - a^2) x y \sin 2\alpha + (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha) y^2 - a^2 b^2 = 0$$

Posto in questa equazione

$$A = (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) ; \quad B = (b^2 - a^2) \sin 2\alpha ; \quad C = (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha) \\ \text{ed } F = -a^2 b^2$$

e sostituendo in essa, si ottiene l'equazione dell'ellisse isometrica :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

NB. Osservando le quattro equazioni trasformate, si notano alcune diversità:

-) l'equazione, trovata con la traslazione e la simmetria centrale, non presenta il monomio misto: cioè il coefficiente $B = 0$, annullando di fatto il monomio Bxy
-) l'equazione trovata con la simmetria assiale presenta tutti i coefficienti
-) l'equazione, trovata con la rotazione di centro O e ampiezza α , non presenta i monomi in cui le variabili x ed y figurano a primo grado: cioè i coefficienti $D = E = 0$, annullando di fatto i monomi Dx ed Ey .
-) le equazioni trovate con le quattro trasformazioni presentano tutte questa caratteristica, qualora si vanno a sostituire ai parametri A, B, C, D, E, F i valori effettivi, che

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Questa disuguaglianza costituisce la condizione perché un polinomio di secondo grado a due incognite rappresenti un'ellisse Infatti

- Caso della trasformazione centrale:

$$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -4b^2\alpha, \quad E = -4a^2\beta, \quad F = 4b^2\alpha^2 + 4a^2\beta^2 - a^2b^2$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4b^2a^2 = -4b^2a^2 < 0 \text{ qualunque siano i valori di } a \text{ e } b.$$

- Caso della trasformazione assiale:

$$A = [b^2(1-m^2)^2 + 4a^2m^2] \quad ; \quad B = 4m(1-m^2)(b^2 - a^2)$$

$$C = [4b^2m^2 + a^2(1-m^2)^2] \quad ; \quad D = [8a^2mq - 4b^2mq(1-m^2)]$$

$$E = [-8b^2m^2q - 4a^2q(1-m^2)] \quad ; \quad F = 4b^2m^2q^2 + 4a^2q^2 - a^2b^2(1+m^2)^2$$

$$B^2 - 4AC = 16m^2(1-m^2)^2(b^2 - a^2)^2 - 4[b^2(1-m^2)^2 + 4a^2m^2][4b^2m^2 + a^2(1-m^2)^2] =$$

$$= - \{32m^2a^2b^2(1 - m^2)^2 + 4a^2b^2[16m^4 + (1 - m^2)^4]\}$$

Il polinomio dentro parentesi graffe risulta sempre positivo, perché somma di quantità positive, pertanto il valore dell'espressione risulta negativo

- Caso della traslazione:

$$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2\alpha, \quad E = -2a^2\beta, \quad F = b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4a^2b^2 = -4a^2b^2 < 0$$

- Caso della rotazione:

$$A = (b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) \quad ; \quad B = (b^2 - a^2)\sin 2\alpha \quad ; \quad C = (b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)$$

ed $F = -a^2b^2$

$$B^2 - 4AC = [b^2 - a^2]^2 \sin^2 2\alpha - 4(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha) =$$

$$= 4b^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 8a^2b^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4a^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4b^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha +$$

$$- 4a^2b^2\sin^4\alpha - 4a^2b^2\cos^4\alpha - 4a^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = -4a^2b^2\sin^4\alpha - 8a^2b^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha -$$

$$4a^2b^2\cos^4\alpha = -4a^2b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 < 0$$

Anche in questo caso $B^2 - 4AC < 0$

Parabola dalla forma canonica alla forma generale.

Equazione canonica: $y = ax^2$

1) Simmetria centrale S_C , con C centro di simmetria:

-) *Equazione*

Sia $C(\alpha; \beta)$ le coordinate del centro di simmetria, andiamo a sostituire alle variabili

dell'equazione canonica le trasformate: $\begin{cases} x \rightarrow 2\alpha - x \\ y \rightarrow 2\beta - y \end{cases}$:

Si ha:

$$2\beta - y = a(2\alpha - x)^2$$

Operando algebricamente:

$$2\beta - y = ax^2 - 4a\alpha x + 4a\alpha^2$$

$$ax^2 - 4a\alpha x + y + 4a\alpha^2 - 2\beta = 0$$

Da questa equazione in forma implicita possiamo individuare due forme:

Prima forma:

Posto in questa equazione $A = a$; $D = -4a\alpha$; $E = 1$; $F = 4a\alpha^2 - 2\beta$ e sostituendo in essa , si ricava:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Seconda forma , detta equazione esplicita:

Posto sempre nella stessa equazione $A = -a$; $B = 4a\alpha$; $C = 2\beta - 4a\alpha^2$ e sostituendo in essa, si ricava:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

2) Simmetria assiale S_a , con la retta $a \equiv y = mx + q$ asse della simmetria

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q) \\ y \rightarrow \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{array} \right.$$

si ha

$$\frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} = a \left[\frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q) \right]^2$$

Operando algebricamente, si ricava:

$$a(1-m^2)^2x^2 + 4am(1-m^2)xy + 4am^2y^2 - 2m(m^2-2aqm^2+2aq+1)x + \\ - (m^4+8aqm^2-1)y + 4aq^2m^2 - 2qm^2 - 2q = 0$$

Posto in questa equazione :

$$\begin{array}{ll} A = a(1-m^2)^2 & ; \quad D = -2m(m^2-2aqm^2+2aq+1) \\ B = 4am(1-m^2) & ; \quad E = -(m^4+8aqm^2-1) \\ C = 4am^2 & ; \quad F = +4aq^2m^2 - 2qm^2 - 2q \end{array}$$

e sostituendo in essa, si ricava:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

3) Traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha ; \beta)$:

-) *Equazione:*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate: $\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow x - \alpha \\ y \rightarrow y - \beta \end{array} \right.$

Si ha

$$y - \beta = a(x - \alpha)^2$$

Operando algebricamente, si ha

$$ax^2 - 2a\alpha x + y - \beta - a\alpha^2 = 0$$

Da questa equazione in forma implicita possiamo individuare due forme dette:

Forma implicita

Posto in questa equazione $A = a$; $D = -2a\alpha$; $E = 1$; $F = -a\alpha^2 - \beta$ e sostituendo in essa , si ricava:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Forma esplicita:

Posto invece $A = -a$; $B = 2a\alpha$; $C = \beta + a\alpha^2$, sostituendo e ricavando la y in funzione della x , si ricava:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Questa forma è detta *equazione normale* della parabola con asse parallelo all'asse delle y :

posto $\Delta = B^2 - 4AC$, l'equazione del suo asse è $x = -\frac{B}{2A}$, le coordinate del suo vertice sono $V\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{\Delta}{4A}\right)$, le coordinate del fuoco sono $F\left(-\frac{B}{2A}; \frac{1-\Delta}{4A}\right)$ e l'equazione della direttrice è $y = -\frac{1+\Delta}{4A}$

Se assoggettiamo questa parabola normale ad una simmetria assiale il cui asse sia la bisettrice del I° e III° quadrante: cioè

$$S_{(y=x)} = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{cases}$$

Otteniamo una seconda forma esplicita:

$$x = Ay^2 + By + C,$$

detta *l'equazione normale* della parabola ma con asse parallelo all'asse delle ascisse,

posto $\Delta = B^2 - 4AC$, l'equazione del suo asse è $y = -\frac{B}{2A}$, le coordinate del suo vertice sono $V\left(-\frac{\Delta}{4A}; -\frac{B}{2A}\right)$, le coordinate del fuoco sono $F\left(\frac{1-\Delta}{4A}; -\frac{B}{2A}\right)$ e l'equazione della direttrice è $x = -\frac{1+\Delta}{4A}$

4) Rotazione ρ_0^α :

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate

$$\begin{cases} x \rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y \rightarrow -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Si ha:

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = a(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2$$

operando algebricamente, si ha

$$ax^2\cos^2\alpha + 2axy\cos\alpha\sin\alpha + ay^2\sin^2\alpha + x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$$

Posto in questa equazione $A = a\cos^2\alpha$, $B = 2a\cos\alpha\sin\alpha$, $C = a\sin^2\alpha$,

$D = \text{sen} \alpha$, $E = \text{cos} \alpha$, e sostituendo in essa, si ricava:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$$

NB. Osservando le quattro equazioni trasformate in forma implicita, si notano alcune diversità:

-) l'equazione, trovata con la traslazione, non presenta il monomio misto: cioè il coefficiente $B = 0$, annullando di fatto il monomio Bxy
-) l'equazione, trovata con la rotazione di centro O e ampiezza α , presenta il monomio misto $B \neq 0$
-) le equazioni trovate con le quattro trasformazioni presentano tutte questa caratteristica, qualora si vanno a sostituire ai parametri A, B, C, D, E, F i valori effettivi , che

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Questa relazione costituisce la condizione perché un polinomio di secondo grado a due incognite rappresenti una parabola Infatti

- Caso della trasformazione centrale:

$A = a$; $D = -4a\alpha$; $E = 1$; $F = 4a\alpha^2 - 2\beta$ e sostituito , si ricava:

$$B^2 - 4AC = 0 - 0a^2 = 0 \text{ qualunque sia il valore di } a .$$

- Caso della trasformazione assiale:

$$A = a(1-m^2)^2 \quad ; \quad D = -2m(m^2-2aqm^2+2aq+1)$$

$$B = 4am(1-m^2) \quad ; \quad E = -(m^4+8aqm^2-1)$$

$$C = 4am^2 \quad ; \quad F = +4aq^2m^2-2qm^2-2q$$

$$B^2 - 4AC = [4am(1-m^2)]^2 - 4(4am^2)[a(1-m^2)^2] =$$

$$= 16a^2m^2(1-m^2)^2 - 16a^2m^2(1-m^2)^2 = 0$$

- Caso della traslazione:

$A = a$; $D = -2a\alpha$; $E = 1$; $F = -\alpha^2 - \beta$ e sostituito , si ricava:

$$B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot 0 \cdot a = 0$$

- Caso della rotazione:

$A = a \cos^2 \alpha$; $B = 2a \cos \alpha \text{sen} \alpha$; $C = a \text{sen}^2 \alpha$; $D = \text{sen} \alpha$; $E = \text{cos} \alpha$

$$B^2 - 4AC = 4a^2 \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha - 4a^2 \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha = 0$$

Iperbole dalla forma canonica alla forma generale

Equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) Simmetria centrale S_O , con O centro di simmetria:

-) *Equazione*

Sia $C(\alpha ; \beta)$ le coordinate del centro di simmetria, andiamo a sostituire alle variabili

dell'equazione canonica le trasformate: $\begin{cases} x \rightarrow 2\alpha - x \\ y \rightarrow 2\beta - y \end{cases}$

$$\frac{(2\alpha - x)^2}{a^2} - \frac{(2\beta - y)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente ne deriva

$$4b^2\alpha^2 - 4b^2\alpha x + b^2x^2 - 4a^2\beta^2 + 4a^2\beta y - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Ordinando, si ha

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 4b^2\alpha x + 4a^2\beta y + 4b^2\alpha^2 - 4a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

Posto

$$A = b^2, \quad C = -a^2, \quad D = -4b^2\alpha, \quad E = 4a^2\beta, \quad F = 4b^2\alpha^2 - 4a^2\beta^2 - a^2b^2$$

Si ottiene l'equazione dell'iperbole isometrica :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2) Simmetria assiale S_a , con la retta $a \equiv y = mx + q$ asse della simmetria

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q) \\ y \rightarrow \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{cases}$$

Si ha:

$$\frac{\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q)\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2}\right)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente:

$$\begin{aligned} & [b^2(1-m^2)^2 - 4a^2m^2]x^2 + 4m(1-m^2)(b^2+a^2)xy + [4b^2m^2 - a^2(1-m^2)^2]y^2 + \\ & + [-8a^2mq - 4b^2mq(1-m^2)]x + [-8b^2m^2q + 4a^2q(1-m^2)]y + \\ & + [4b^2m^2q^2 - 4a^2q^2 - a^2b^2(1+m^2)^2] = 0 \end{aligned}$$

Posto in questa equazione :

$$\begin{aligned} A &= [b^2(1-m^2)^2 - 4a^2m^2] & ; & \quad B = 4m(1-m^2)(b^2+a^2) \\ C &= [4b^2m^2 - a^2(1-m^2)^2] & ; & \quad D = [-8a^2mq - 4b^2mq(1-m^2)] \\ E &= [-8b^2m^2q + 4a^2q(1-m^2)] & ; & \quad F = 4b^2m^2q^2 - 4a^2q^2 - a^2b^2(1+m^2)^2 \end{aligned}$$

e sostituendo in essa, si ottiene l'equazione dell'iperbole isometrica :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Caso particolare:

Assoggettiamo l'equazione canonica dell'iperbole ad una simmetria assiale il cui asse sia la bisettrice del I° e III° quadrante: cioè

$$S_{(y=x)} = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \parallel \begin{cases} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{cases}$$

l'equazione dell'iperbole diviene: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. In questa trasformazione l'asse trasverso diviene l'asse delle ordinate e pertanto i fuochi hanno coordinate $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$.

La stessa equazione $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ possiamo scriverla, moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per -1 , in questo modo $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$. Tenendo conto poi che i parametri a e b non sono altro che dei numeri indicati, possiamo interscambiarli senza ledere il valore dell'espressione e quindi uniformandoci alla scrittura che vuole la a come denominatore della x e la b come denominatore della y . Otteniamo così l'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

In questa nuova forma i punti notevoli e le rette notevoli sono:

$$\begin{aligned} \text{Fuochi} & \quad F_1(0; -c), F_2(0; c) \\ \text{Vertici} & \quad A(0; -b), A'(0; b) \\ \text{Asintoti} & \quad y = \pm \frac{b}{a}x \\ \text{Eccentricità} & \quad e = \frac{c}{b} \end{aligned}$$

3) Rotazione: ρ_0^α :

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate

$$\parallel \begin{cases} x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Si ha:

$$\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}{a^2} - \frac{(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente, si ha

$$\begin{aligned} b^2 x^2 \cos^2 \alpha + 2b^2 x y \cos \alpha \sin \alpha + b^2 y^2 \sin^2 \alpha - a^2 x^2 \sin^2 \alpha + 2a^2 x y \sin \alpha \cos \alpha + \\ - a^2 y^2 \cos^2 \alpha - a^2 b^2 = 0 \end{aligned}$$

Ordinando e tenendo conto delle formule di goniometria, si ha

$$(b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) x^2 + (b^2 + a^2) xy \sin 2\alpha + (b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha) y^2 - a^2 b^2 = 0$$

Posto in questa equazione

$$A = (b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) ; B = (b^2 + a^2) \sin 2\alpha ; C = (b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha) \\ \text{ed } F = -a^2 b^2$$

e sostituendo in essa, si ottiene l'equazione dell'iperbole isometrica :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

Caso particolare:

Data l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi : $x^2 - y^2 = a^2$, se l'assoggettiamo ad una rotazione con $\alpha = 45^\circ$, il sistema diviene:

$$\rho = \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases} \\ \left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{array} \right.$$

Sostituendo all'equazione dell'iperbole equilatera $\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{array} \right.$, si ha

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \right]^2 = a^2,$$

da cui operando ricaviamo l'equazione:

$$xy = 2a^2$$

Posto $k = 2a^2$, si ha l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, che in questo caso sono proprio gli assi cartesiani:

$$xy = k$$

Se $k > 0$, l'asse trasverso coincide con la retta $y = x$, la bisettrice del I° e III° quadrante; se $k < 0$, l'asse trasverso coincide con la retta $y = -x$, la bisettrice del II° e IV° quadrante

4) *Traslazione di vettore* $\vec{v}(\alpha ; \beta)$: $T\vec{v}$

-) *Equazione:*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate: $\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow x - \alpha \\ y \rightarrow y - \beta \end{array} \right.$

Si ha

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente:

$$b^2x^2 - 2b^2\alpha x - b^2\alpha^2 - a^2y^2 + 2a^2\beta y - a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

e ordinando ,si ha

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2\alpha x + 2a^2\beta y + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

Posto in questa equazione

$$A = b^2, \quad C = -a^2, \quad D = -2b^2\alpha, \quad E = 2a^2\beta, \quad F = b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2$$

e sostituendo in essa, si ottiene l'equazione dell'iperbole isometrica :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Caso particolare

Data l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti $xy = k$, se l'assoggettiamo ad una traslazione, essa si trasforma in: $(x - \alpha)(y - \beta) = k$, da cui operando si ha $xy - \beta x - \alpha y + \alpha\beta = k$, raccogliendo $y(x - \alpha) = \beta x - \alpha\beta + k$, dividendo per $x - \alpha$

Si ha $y = \frac{\beta x - \alpha\beta + k}{x - \alpha}$, che risulta, posto $a = \beta, b = -\alpha\beta + k, c = 1, d = -\alpha$,

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Tale equazione è detta *funzione omografica*, che risulta l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti traslata.

Punti notevoli e rette notevoli:

$$\text{Centro } C \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$$

Asintoti : $x = -\frac{d}{c}; y = \frac{a}{c}$, rette che risultano parallele agli assi cartesiani.

Assi: $y = \pm \left(x + \frac{d}{c} \right) + \frac{a}{c}$, rette che risultano parallele alle bisettrici dei quadranti.

NB. Per determinare la funzione omografica occorrono tre condizioni indipendenti in quanto i quattro parametri non sono indipendenti: infatti dividendo numeratore e denominatore per c e posto $m = \frac{a}{c}, n = \frac{b}{c}$ e $p = \frac{d}{c}$ si ha: $y = \frac{mx+n}{x+p}$ con m, n, p indipendenti: condizione già riscontrabile nello sviluppo dell'impostazione della traslazione.

NB. Osservando le quattro equazioni trasformate, si notano alcune diversità:

-) l'equazione, trovata con la traslazione e la simmetria centrale, non presenta il monomio misto cioè il coefficiente $B = 0$, annullando di fatto il monomio Bxy
-) l'equazione trovata con la simmetria assiale presenta tutti i coefficienti
-) l'equazione, trovata con la rotazione di centro O e ampiezza α , non presenta i monomi in cui le variabili x ed y figurano a primo grado: cioè i coefficienti $D = E = 0$, annullando di fatto i monomi Dx ed Ey .
-) le equazioni trovate con le quattro trasformazioni presentano, qualora si vanno a sostituire ai parametri A, B, C, D, E, F con i valori effettivi, tutte questa caratte-

ristica :

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Tale relazione costituisce la condizione perché un polinomio di secondo grado a due incognite rappresenti un'iperbole

Infatti

- Caso della trasformazione centrale:

$$A = b^2, \quad C = -a^2, \quad D = -4b^2\alpha, \quad E = 4a^2\beta, \quad F = 4b^2\alpha^2 - 4a^2\beta^2 - a^2b^2$$

$$B^2 - 4AC = 0 + 4b^2a^2 = 4b^2a^2 > 0 \text{ qualunque siano i valori di } a \text{ e } b.$$

- Caso della trasformazione assiale:

$$A = [b^2(1-m^2)^2 - 4a^2m^2] \quad ; \quad B = 4m(1-m^2)(b^2 + a^2)$$

$$C = [4b^2m^2 - a^2(1-m^2)^2] \quad ; \quad D = [-8a^2mq - 4b^2mq(1-m^2)]$$

$$E = [-8b^2m^2q + 4a^2q(1-m^2)] \quad ; \quad F = 4b^2m^2q^2 - 4a^2q^2 - a^2b^2(1+m^2)^2$$

$$B^2 - 4AC = 16m^2(1-m^2)^2(b^2+a^2)^2 - 4[b^2(1-m^2)^2 - 4a^2m^2][4b^2m^2 - a^2(1-m^2)^2] =$$

$$= \{32m^2a^2b^2(1-m^2)^2 + 4a^2b^2[16m^4 + (1-m^2)^4]\} > 0$$

Il polinomio dentro parentesi risulta sempre positivo, perché somma di quantità positive,

- Caso della traslazione:

$$A = b^2, \quad C = -a^2, \quad D = -2b^2\alpha, \quad E = 2a^2\beta, \quad F = b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2$$

$$B^2 - 4AC = 0 + 4a^2b^2 = 4a^2b^2 > 0$$

- Caso della rotazione:

$$A = (b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) \quad ; \quad B = 2(b^2 + a^2)\sin\alpha\cos\alpha \quad ; \quad C = (b^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)$$

ed $F = -a^2b^2$

$$B^2 - 4AC = [2(b^2 + a^2)\sin\alpha\cos\alpha]^2 - 4(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)(b^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha) =$$

$$= 4(b^2 + a^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4b^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 4a^2b^2\cos^4\alpha + 4a^2b^2\sin^4\alpha +$$

$$- 4a^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 4(b^2 + a^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4(b^4 + a^4)\cos^2\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+ 4a^2b^2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) = 4(b^2 + a^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4(b^2 + a^2)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+ 8b^2a^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 4a^2b^2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha)$$

$$B^2 - 4AC = 8b^2a^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 4a^2b^2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) > 0, \text{ perché somma di monomi goniometrici positivi}$$

Circonferenza dalla forma canonica alla forma generale:

Equazione canonica: $x^2 + y^2 = r^2$

1) Simmetria centrale S_C , con C centro di simmetria:

-) *Equazione*

Sia $C(\alpha; \beta)$ le coordinate del centro di simmetria, andiamo a sostituire alle variabili

dell'equazione canonica le trasformate: $\begin{cases} x \rightarrow 2\alpha - x \\ y \rightarrow 2\beta - y \end{cases}$

$$(2\alpha - x)^2 + (2\beta - y)^2 = 1$$

Operando algebricamente ne deriva

$$4\alpha^2 - 4\alpha x + x^2 + 4\beta^2 - 4\beta y + y^2 - r^2 = 0$$

Ordinando, si ha

$$x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\beta y + 4\alpha^2 + 4\beta^2 - r^2 = 0$$

Posto

$$A = -4\alpha, \quad B = -4\beta, \quad C = 4\alpha^2 + 4\beta^2 - r^2$$

Si ottiene l'equazione della circonferenza isometrica, detta anche equazione generale :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

5) Simmetria assiale: S_a , con la retta $a \equiv y = mx + q$ asse della simmetria

-) *Equazione*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q) \\ y \rightarrow \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{cases}$$

Si ha:

$$\left[\frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}(y-q) \right]^2 + \left[\frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \right]^2 = r^2$$

Operando algebricamente:

$$\begin{aligned} & [(1-m^2)^2 + 4m^2]x^2 + [4m^2 + (1-m^2)^2]y^2 + [8mq]x + [-4q(1-m^2)]y - r^2 = 0 \\ & (1+m^2)^2 x^2 + (1+m^2)^2 y^2 + 8mqx - 4q(1-m^2)y - r^2(1+m^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Dividendo quest'ultima equazione per $(1+m^2)^2$, si ha

$$x^2 + y^2 + \frac{8mq}{(1+m^2)^2}x - \frac{4q(1-m^2)}{(1+m^2)^2}y - r^2 = 0$$

Posto :

$$A = \frac{8mq}{(1+m^2)^2} \quad B = -\frac{4q(1-m^2)}{(1+m^2)^2} ; \quad C = -r^2$$

e sostituendo, si ottiene l'equazione della circonferenza isometrica :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

6) Traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha; \beta)$: $T\vec{v}$

-) *Equazione:*

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate: $\begin{cases} x \rightarrow x - \alpha \\ y \rightarrow y - \beta \end{cases}$

Si ha

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Operando algebricamente:

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0$$

Ordinando, si ha

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Posto

$$A = -2\alpha, \quad B = -2\beta, \quad C = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

e sostituito, si ottiene l'equazione della circonferenza isometrica:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

4) Rotazione ρ_O^α :

-) Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate

$$\begin{cases} x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Si ha:

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = r^2$$

Operando algebricamente, si ha

$$x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \cos \alpha \sin \alpha + y^2 \sin^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - r^2 = 0$$

Ordinando e tenendo conto delle formule di goniometria, si ha

$$x^2 + y^2 = r^2$$

-) La circonferenza di centro O è una figura unita per la rotazione ρ_O^α di centro O e ampiezza α : l'equazione è uguale a quella di partenza

Sintesi:

Le trasformazioni, che presentano proprietà involutorie, sono quelle che hanno sia sopra che sotto la linea divisoria tra sistemi diretti e inversi la stessa equazione e sono la simmetria centrale e assiale

Tutte le equazioni delle diverse coniche canoniche e non canoniche, queste ultime trovate mediante trasformazioni isometriche, è possibile ricondurle ad una equazione generale comune

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dalle note fatte per individuare in tale equazione le coniche specifiche basti imporre le condizioni poste:

- Se $B^2 - 4AC < 0$, allora la conica è un'ellisse, in particolare se $B = 0$ e $A = C$ allora la conica è una circonferenza
- Se $B^2 - 4AC = 0$, allora la conica è una parabola
- Se $B^2 - 4AC > 0$, allora la conica è un'iperbole, in particolare se $A = C$ allora l'iperbole è equilatera
- Se $B = 0$ la conica non è ruotata, altrimenti è ruotata
- Se almeno uno dei coefficienti D od E è diverso da zero la conica è traslata, se entrambi sono uguali a zero la conica non è traslata
- Inoltre applicando il teorema CNS perché un punto appartiene ad una curva, si può affermare: se $F = 0$ la conica passa per l'origine degli assi cartesiani $O(0; 0)$, altrimenti non passa per l'origine degli assi cartesiani $O(0; 0)$: infatti le coordinate $(0; 0)$ soddisfano l'equazione generale nel caso che $F = 0$.

4 Trasformazione omotetica e simile

Dall'Aritmetica sappiamo che il rapporto fra due numeri, di cui il secondo sia diverso da zero, è il quoziente esatto della divisione fra il primo numero ed il secondo: di solito si indica in forma frazionaria, cioè $\rho = \frac{n}{d}$ oppure $\rho = n : d$, se la divisione viene effettuata tra n e d con ρ si indica il rapporto; e, che quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione se il rapporto di due di essi è uguale al rapporto degli altri due: cioè $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oppure $a : b = c : d$. Sappiamo pure che qualunque sia la proporzione vale la proprietà fondamentale: "In una proporzione il prodotto dei medi (b, c) è uguale al prodotto degli estremi (a, d)", che possiamo scrivere $b \cdot c = a \cdot d$. Se accade che i medi b, c sono uguali: $b = c = m$ allora la proporzione $a : m = m : d$ è una proporzione continua: in questo contesto la proprietà fondamentale afferma che $m^2 = a \cdot d$.

Dalla Geometria elementare ricordiamo che due grandezze si dicono omogenee o della stessa specie se è possibile confrontarle: cioè stabilire se una è maggiore, uguale o minore dell'altra, e sommarle. Così pure che il rapporto di due grandezze della stessa specie è il quoziente delle loro misure rispetto ad una qualsiasi unità; ed, in oltre, che quattro grandezze omogenee fra loro le prime due ed omogenee fra loro le ultime due si dicono in proporzione se il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto delle seconde due.

Teorema fondamentale: C.N.S affinché le grandezze di due insiemi in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che

- A grandezze uguali dell'uno corrispondono grandezze uguali dell'altro
- Alla somma di due o più grandezze del primo insieme corrisponde la somma delle grandezze corrispondenti del secondo insieme.

Teorema di Talete: Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali

Corollario: La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

-) *Trasformazione omotetica*

I concetti aritmetici e geometrici richiamati permettono di introdurre in un piano una nuova trasformazione: l'omotetia. Tale trasformazione è caratterizzata da un centro fisso O , dall'allineamento dei punti corrispondenti P e P' con O e dal rapporto costante $\frac{P'O}{PO}$.

Def 11) . Fissato in un piano π un punto O e considerato un numero reale $k \neq 0$, si chiama *omotetia di centro O e rapporto k* la trasformazione del piano π in sé che, indicati con P e P' i punti corrispondenti, si ha:

-) P' sia allineato con O e con P
-) P' appartenga alla semiretta OP se $k > 0$, alla semiretta opposta se $k < 0$.
-) $\frac{d(P',O)}{d(P;O)} = |k|$

NB L'omotetia è univocamente determinata dal suo centro O e dal rapporto $|k|$: detto rapporto di omotetia.

Tale trasformazione verrà indicata con $\Omega_{O,k}$

Proprietà:

- 1) Il centro O è l'unico punto unito dell'omotetia
- 2) Un'omotetia trasforma una retta in una retta parallela ad essa.
- 3) Un'omotetia conserva l'ampiezza degli angoli corrispondenti
- 4) Un'omotetia trasforma rette parallele in rette parallele: cioè l'omotetia conserva il parallelismo
- 5) Un'omotetia trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari: cioè un'omotetia conserva la perpendicolarità
- 6) Segmenti che si corrispondono in un'omotetia di rapporto k sono paralleli e hanno rapporto costante uguale a $|k|$: un'omotetia conserva il rapporto tra segmenti corrispondenti.
- 7) Un'omotetia in generale non conserva la distanza di due punti, a meno che il rapporto $k = 1$

Equazione:

L'osservazione fatta sulla definizione di omotetia: cioè che l'omotetia è univocamente determinata quando se ne assegna il centro ed il rapporto, permette di determinare i sistemi che definiscono tale trasformazione. Fissato pertanto un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy sul piano π , sia O il centro di tale sistema. Si consideri che O sia il centro di omotetia e k il rapporto di omotetia. Sia $P(x_P; y_P)$ un punto del piano π e sia $P'(x_{P'}; y_{P'})$ il corrispondente di P rispetto a detta trasformazione. I punti O, P, P' sono allineati e tali che $\frac{P'O}{PO} = |k|$. Siano P_x e P'_x le proiezioni rispettivamente di P e P' sull'asse delle ascisse. Si considerino l'asse delle ordinate, le rette sostegno dei segmenti P_xP e P'_xP' , queste sono parallele in quanto perpendicolari all'asse delle ascisse, quindi costituiscono un fascio di rette parallele, mentre la retta sostegno dei tre punti O, P, P' e l'asse delle ascisse costituiscono le due trasversali, pertanto per il teorema di Talete le rette parallele determinano sulle

trasversali segmenti direttamente proporzionali: $\frac{P'O}{PO} = \frac{P'_xO}{P_xO} = |k|$; analogo ragionamento se proiettiamo P' e P sull'asse delle ordinate, quindi: $\frac{P'O}{PO} = \frac{P'_yO}{P_yO} = |k|$. Da queste relazioni discende il sistema di equazioni relative all'omotetia:

$$\Omega_{O,k} = \begin{cases} \mathbf{x}' = k\mathbf{x} \\ \mathbf{y}' = k\mathbf{y} \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{k}\mathbf{x} \\ \mathbf{y} \rightarrow \frac{1}{k}\mathbf{y} \end{array} \right.$$

L'omotetia generale di centro $C(\alpha; \beta)$ e rapporto k è data dalla composizione di una *Traslazione di vettore* $\vec{v}(\alpha; \beta)$ e una omotetia di centro O e rapporto k : $\Omega_{O,k}$:

$$\Omega_{C,k} = \begin{cases} \mathbf{x}' = k\mathbf{x} + (1-k)\alpha \\ \mathbf{y}' = k\mathbf{y} + (1-k)\beta \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{k}\mathbf{x} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\alpha \\ \mathbf{y} \rightarrow \frac{1}{k}\mathbf{y} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta \end{array} \right.$$

CONICHE OMOTETICHE

In questa sezione applichiamo alle equazioni canoniche delle diverse coniche la trasformazione omotetica ottenendo così nuove equazioni di coniche omotetiche alle coniche canoniche. Se il centro dell'omotetia è il centro del sistema il grafico della conica trasformata è sempre dello stesso tipo della conica canonica ma risulta rimpicciolito o ingrandito secondo che $|k| < 1$ o $|k| > 1$. Se il centro è diverso dal centro del sistema cartesiano, allora il grafico della conica trasformata è sempre dello stesso tipo della conica canonica ma risulta oltre che rimpicciolito o ingrandito anche traslato.

Ellisse:

$$\text{Equazione canonica: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Omotetia di centro O e rapporto k: $\Omega_{O,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y \end{array} \right.$$

Si ha l'equazione dell'ellisse omotetica di centro O e rapporto k

$$\frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} = 1$$

Omotetia di centro C e rapporto k: $\Omega_{C,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\alpha \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{[x + (k-1)\alpha]^2}{k^2 a^2} + \frac{[y + (k-1)\beta]^2}{k^2 b^2} = 1$$

Operando algebricamente:

$$b^2 x^2 + 2b^2 \alpha (k-1)x + b^2 \alpha^2 (k-1)^2 + a^2 y^2 + 2a^2 \beta (k-1)y + a^2 \beta^2 (k-1)^2 - k^2 a^2 b^2 = 0$$

e ordinando, ricaviamo l'equazione dell'ellisse omotetica di centro C e rapporto k:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + 2b^2 \alpha (k-1)x + 2a^2 \beta (k-1)y + b^2 \alpha^2 (k-1)^2 + a^2 \beta^2 (k-1)^2 - k^2 a^2 b^2 = 0$$

Osservazione: I coefficienti dei monomi di secondo grado non presentano il fattore k di omotetia, mentre tale fattore è presente nei coefficienti lineari e nel termine noto: questo sta a significare che la natura della conica non è cambiato mentre la lunghezza degli assi sì: cioè si è ottenuta un'ellisse in posizione diversa ma ingrandita se $|k| > 1$, rimpicciolita nel caso $|k| < 1$.

Circonferenza:

Equazione canonica: $x^2 + y^2 = r^2$

Omotetia di centro O e rapporto k: $\Omega_{O,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{k} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \rightarrow \frac{1}{k} \mathbf{y} \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = r^2$$

da cui ricaviamo l'equazione della circonferenza omotetica di centro O e rapporto k

$$x^2 + y^2 = k^2 r^2$$

Osservazione. L'omotetia $\Omega_{O,k}$ trasforma la circonferenza canonica in una circonferenza concentrica alla data e tale che il rapporto tra i raggi è k.

Omotetia di centro C e rapporto k: $\Omega_{C,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{k} \mathbf{x} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \alpha \\ \mathbf{y} \rightarrow \frac{1}{k} \mathbf{y} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \beta \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{[x + (k-1)\alpha]^2}{k^2} + \frac{[y + (k-1)\beta]^2}{k^2} = r^2$$

Operando algebricamente

$$x^2 + 2\alpha(k-1)x + \alpha^2(k-1)^2 + y^2 + 2\beta(k-1)y + \beta^2(k-1)^2 - k^2 r^2 = 0$$

e ordinando, ricaviamo l'equazione della circonferenza omotetica di centro C e rapporto k:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha(k-1)x + 2\beta(k-1)y + \alpha^2(k-1)^2 + \beta^2(k-1)^2 - k^2 r^2 = 0$$

Osservazione: I coefficienti dei monomi di secondo grado non presentano il fattore k di omotetia, mentre tale fattore è presente nei coefficienti lineari e nel termine noto: questo sta a significare che la natura della conica non è cambiata mentre la lunghezza del raggio sì: cioè si è ottenuta una circonferenza in posizione diversa ma ingrandita se $|k| > 1$, rimpicciolita nel caso $|k| < 1$.

Parabola:

Equazione canonica: $y = a x^2$

Omotetia di centro O e rapporto k: $\Omega_{O,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{1}{k}y = a \frac{x^2}{k^2},$$

da cui ricaviamo l'equazione della parabola omotetica di centro O e rapporto k:

$$y = \frac{a}{k} x^2$$

Omotetia di centro C e rapporto k: $\Omega_{C,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\alpha \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{1}{k}y + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta = a \left[\frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\alpha \right]^2$$

Operando algebricamente ed esplicitando, ricaviamo l'equazione della parabola omotetica di centro C e rapporto k:

$$y = \frac{a}{k} x^2 + \frac{2(k-1)\alpha a}{k} x + \frac{(k-1)^2 \alpha^2 a}{k} + \beta - k\beta$$

Iperbole:

$$\text{Equazione canonica: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Omotetia di centro O e rapporto k: $\Omega_{O,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y \end{array} \right.$$

Si ha l'equazione dell'iperbole omotetica di centro O e rapporto k

$$\frac{x^2}{k^2 a^2} - \frac{y^2}{k^2 b^2} = 1$$

Omotetia di centro C e rapporto k: $\Omega_{C,k}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\alpha \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{[x + (k-1)\alpha]^2}{k^2 a^2} - \frac{[y + (k-1)\beta]^2}{k^2 b^2} = 1$$

Operando algebricamente

$$b^2 x^2 + 2b^2 \alpha (k-1)x + b^2 \alpha^2 (k-1)^2 - [a^2 y^2 + 2a^2 \beta (k-1)y + a^2 \beta^2 (k-1)^2] - k^2 a^2 b^2 = 0$$

e ordinando si ha l'equazione dell'iperbole omotetica di centro C e rapporto k

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 + 2b^2 \alpha (k-1)x - 2a^2 \beta (k-1)y + b^2 \alpha^2 (k-1)^2 - a^2 \beta^2 (k-1)^2 - k^2 a^2 b^2 = 0$$

Osservazione: I coefficienti dei monomi di secondo grado non presentano il fattore k di omotetia, mentre tale fattore è presente nei coefficienti lineari e nel termine noto: questo sta a significare che la natura della conica non è cambiato mentre la lunghezza degli assi sì: cioè si è ottenuta un'iperbole in posizione diversa ma ingrandita se $|k| > 1$, rimpicciolita nel caso $|k| < 1$.

Osservazione generale: le diverse equazioni, relative alle diverse coniche, ottenute mediante la trasformazione omotetica da un punto di vista formale rispetto alla trasformazione isometrica sono equivalenti, tuttavia facendo i confronti sui coefficienti si nota che le figure sono ingrandite o rimpicciolite di un certo rapporto k e che i punti corrispondenti sono allineati con il centro di omotetia qualunque esso sia.

- ***Trasformazione simile.***

A differenza dell'omotetia la trasformazione simile non ha in generale un centro e di conseguenza i punti corrispondenti non hanno un allineamento, mentre come l'omotetia il rapporto delle misure dei segmenti aventi per estremi punti corrispondenti rimane costante ed è uguale al rapporto $|k|$ fissato.

Def. 12) Fissato un numero reale positivo $k \neq 0$, si chiama *trasformazione simile di rapporto k* la trasformazione del piano π in sé che, indicati con P e Q due punti del piano π e P' e Q' i punti corrispondenti, si ha:

$$\frac{d(P',Q')}{d(P;Q)} = k$$

NB Il rapporto k è detto rapporto di similitudine. Se tale rapporto è uguale ad 1, la trasformazione simile si riduce ad una trasformazione isometrica. Σ

Tale trasformazione verrà indicata con Σ_k

Proprietà:

- 1) La trasformazione simile conserva l'ampiezza degli angoli corrispondenti
- 2) La trasformazione simile trasforma rette parallele in rette parallele: cioè la similitudine conserva il parallelismo
- 3) La trasformazione simile trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari: cioè la similitudine conserva la perpendicolarità
- 4) Segmenti che si corrispondono in una similitudine di rapporto k hanno rapporto costante uguale a k : la similitudine conserva il rapporto tra segmenti corrispondenti.
- 5) Una similitudine in generale non conserva la distanza di due punti, a meno che il rapporto $k = 1$
- 6) Due poligoni si dicono simili se hanno i lati corrispondenti in proporzione e gli angoli congruenti
- 7) In due poligoni simili i perimetri stanno tra di loro come due lati corrispondenti: cioè $\frac{2p'}{2p} = k$, dove k è il rapporto di similitudine.
- 8) In due poligoni simili le aree stanno tra di loro come i quadrati di due lati corrispondenti: cioè $\frac{A'}{A} = k^2$, dove k è il rapporto di similitudine.

NB.

- 1) La trasformazione simile di rapporto k può essere ottenuta dalla composizione, in ordine qualsiasi, di un'omotetia (di centro arbitrario e rapporto k) e di un'isometria.
- 2) La composizione di due trasformazioni simili di rapporto k ed h è equivalente ad una trasformazione simile di rapporto il prodotto $h \cdot k$.

Equazione:

La nota 1) fatta sulle proprietà della similitudine: cioè la trasformazione simile di rapporto k può essere ottenuta dalla composizione, in ordine qualsiasi, di un'omotetia di centro arbitrario e rapporto k e di un'isometria, permette di determinare i sistemi che definiscono tale trasformazione. Fissato pertanto un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy sul piano π , sia O il centro di omotetia di rapporto k , con $k > 0$ in questo contesto: il sistema risolvente tale trasformazione è

$$\Omega_{0,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ \left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}x \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y \end{array} \right. \end{cases}$$

Sullo stesso piano sia dato il sistema risolvente di una generica isometria:

$$\mathfrak{I} = \frac{\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}}{\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow dx - by - (dp - bq) \\ y \rightarrow -cx + ay + (cp - aq) \end{array} \right.} \quad \text{con} \quad \begin{cases} ad - bc = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Componendo le due trasformazioni

$$\Sigma_k = \Omega_{0,k} \circ \mathfrak{I}$$

Operando sui sistemi si ha

$$\Sigma_k = \frac{\begin{cases} x' = k(ax + by + p) \\ y' = k(cx + dy + q) \end{cases}}{\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{k}[dx - by - (dp - bq)] \\ y \rightarrow \frac{1}{k}[-cx + ay + (cp - aq)] \end{array} \right.} \quad \text{con} \quad \begin{cases} ad - bc = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Generalizzando:

$$\Sigma_k = \frac{\begin{cases} x' = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{p} \\ y' = \bar{c}x + \bar{d}y + \bar{q} \end{cases}}{\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta}[\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta}[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \Delta \\ \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{c}^2 + \bar{d}^2 \\ \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} = 0 \end{cases} \quad \text{e } k = \sqrt{\Delta}$$

CONICHE SIMILI

In questa sezione applichiamo alle equazioni canoniche delle diverse coniche la trasformazione simile ottenendo così nuove equazioni di coniche simili alle coniche canoniche.

Ellisse:

$$\text{Equazione canonica: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Similitudine di rapporto } k : \Sigma_{\mathbf{k}}$$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta} [\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta} [-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{\left\{ \frac{1}{\Delta} [\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \right\}^2}{a^2} + \frac{\left\{ \frac{1}{\Delta} [-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \right\}^2}{b^2} = 1$$

Operando algebricamente

$$\begin{aligned} & b^2 \bar{d}^2 x^2 + b^2 \bar{b}^2 y^2 + b^2 (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})^2 - 2b^2 \bar{d}\bar{b}xy - 2b^2 \bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})x + 2b^2 \bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})y + \\ & + a^2 \bar{c}^2 x^2 + a^2 \bar{a}^2 y^2 + a^2 (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})^2 - 2a^2 \bar{a}\bar{c}xy - 2a^2 \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})x + 2a^2 \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})y + \\ & - a^2 b^2 (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 = 0 \end{aligned}$$

e raccogliendo , ricaviamo l'equazione dell'ellisse simile:

$$(a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2)x^2 - 2(b^2 \bar{d}\bar{b} + a^2 \bar{a}\bar{c})xy + (a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2)y^2 - 2[b^2 \bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + a^2 \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]x + 2[b^2 \bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + a^2 \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] - a^2 b^2 (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 = 0$$

Vogliamo verificare la condizione, perché l'equazione trovata è proprio l'equazione di un'ellisse: cioè verifichiamo che $B^2 - 4AC < 0$

$$\begin{aligned} & 4(b^2 \bar{d}\bar{b} + a^2 \bar{a}\bar{c})^2 - 4(a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2)(a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2) = 4[b^4 \bar{d}^2 \bar{b}^2 + 2a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 - \\ & a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 - a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 - a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 - b^4 \bar{d}^2 \bar{b}^2] = -4a^2 b^2 (\bar{b}^2 \bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}^2 \bar{d}^2) = \\ & -4a^2 b^2 (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 < 0 \end{aligned}$$

La condizione è verificata pertanto l'equazione è l'equazione di un'ellisse: la trasformazione simile come tutte quelle che l'hanno preceduta trasformano ellissi in ellissi.

Circonferenza

Equazione canonica: $x^2 + y^2 = r^2$

Similitudine di rapporto k : $\Sigma_{\mathbf{k}}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta} [\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta} [-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.$$

Si ha

$$\left\{ \frac{1}{\Delta} [\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{\Delta} [-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \right\}^2 = r^2$$

Elevando al quadrato e facendo il minimo comun denominatore, si ha:

$$\bar{d}^2 x^2 + \bar{b}^2 y^2 + (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})^2 - 2\bar{d}\bar{b}xy - 2\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})x + 2\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})y + \\ + \bar{c}^2 x^2 + \bar{a}^2 y^2 + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})^2 - 2\bar{a}\bar{c}xy - 2\bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})x + 2\bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})y - r^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 = 0$$

Raccogliendo e tenendo presente le condizioni della trasformazione, otteniamo l'equazione di una circonferenza: quindi la trasformazione simile come tutte le altre che la precedono trasforma circonferenze in circonferenze.

$$x^2 + y^2 - \frac{2[\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]}{(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)} x + \frac{2[\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]}{(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)} y - \frac{r^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2}{(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)} = 0$$

Parabola

Equazione canonica: $y = a x^2$

Similitudine di rapporto k : $\Sigma_{\mathbf{k}}$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta} [\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta} [-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{1}{\Delta}[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] = a \left\{ \frac{1}{\Delta}[\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \right\}^2$$

Sviluppando il quadrato, semplificando e operando il minimo comun denominatore, si ha
 $(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] = a(\bar{d}^2x^2 + \bar{b}^2y^2 + (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})^2 - 2\bar{d}\bar{b}xy - 2\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})x + 2\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})y)$

Da cui l'equazione della parabola simile

$$a\bar{d}^2x^2 - 2a\bar{d}\bar{b}xy + a\bar{b}^2y^2 + [\bar{c}(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) - 2\bar{a}\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})]x - [\bar{a}(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) - 2a\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})]y + [a(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})^2 - (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] = 0$$

Vogliamo verificare la condizione, perché l'equazione trovata è proprio l'equazione di una parabola: cioè verifichiamo che $B^2 - 4AC = 0$

$$B^2 - 4AC = 4a^2\bar{b}^2\bar{d}^2 - 4a^2\bar{b}^2\bar{d}^2 = 0$$

La condizione è verificata pertanto l'equazione è l'equazione di una parabola: la trasformazione simile come tutte quelle che l'hanno preceduta trasformano parabola in parabola.

Iperbole:

$$\text{Equazione canonica: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Similitudine di rapporto } k : \Sigma_{\mathbf{k}}$$

Equazione

Andiamo a sostituire alle variabili dell'equazione canonica le trasformate:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta}[\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta}[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.$$

Si ha

$$\frac{\left\{ \frac{1}{\Delta}[\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \right\}^2}{a^2} - \frac{\left\{ \frac{1}{\Delta}[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \right\}^2}{b^2} = 1$$

Operando

$$b^2\bar{d}^2x^2 + b^2\bar{b}^2y^2 + b^2(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})^2 - 2b^2\bar{d}\bar{b}xy - 2b^2\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})x + 2b^2\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})y + \\ -a^2\bar{c}^2x^2 - a^2\bar{a}^2y^2 - a^2(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})^2 + 2a^2\bar{a}\bar{c}xy + 2a^2\bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})x - 2a^2\bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})y + \\ -a^2b^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 = 0$$

e raccogliendo , otteniamo l'equazione dell'iperbole simile

$$(-a^2\bar{c}^2 + b^2\bar{d}^2)x^2 - 2(b^2\bar{d}\bar{b} - a^2\bar{a}\bar{c})xy + (-a^2\bar{a}^2 + b^2\bar{b}^2)y^2 - 2[b^2\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + -a^2\bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]x + 2[b^2\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) - a^2\bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] - a^2b^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 = 0$$

Vogliamo verificare la condizione, perché l'equazione trovata è proprio l'equazione di un'iperbole: cioè verifichiamo che $B^2 - 4AC > 0$

$$4(b^2\bar{d}\bar{b} - a^2\bar{a}\bar{c})^2 - 4(-a^2\bar{c}^2 + b^2\bar{d}^2)(-a^2\bar{a}^2 + b^2\bar{b}^2) = 4[b^4\bar{d}^2\bar{b}^2 - 2a^2b^2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a^4\bar{a}^2\bar{c}^2 - a^4\bar{a}^2\bar{c}^2 + a^2b^2\bar{b}^2\bar{c}^2 + a^2b^2\bar{a}^2\bar{d}^2 - b^4\bar{d}^2\bar{b}^2] = 4a^2b^2(\bar{b}^2\bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}^2\bar{d}^2) = 4a^2b^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 > 0$$

La condizione è verificata pertanto l'equazione è l'equazione di un'iperbole: la trasformazione simile come tutte quelle che l'hanno preceduta trasformano iperboli in iperboli.

Osservazione Generale:

- 1) La radice quadrata del valore di Δ costituisce il rapporto di similitudine: $\sqrt{\Delta} = k \neq 0$
Se $k > 0$, la trasformazione si dice diretta: cioè la figura trasformata non muta il verso di percorrenza del suo contorno; se $k < 0$, la trasformazione si dice invertente: cioè la figura trasformata muta il verso di percorrenza del suo contorno.
- 2) La trasformazione simile è la trasformazione più generale tra quelle viste, infatti, posto nelle condizioni $\Delta = 1$, la trasformazione simile si riduce ad una trasformazione isometrica; mentre se nelle condizioni poniamo $\bar{b} = \bar{c} = 0$ e $\bar{a} = \bar{d} = k$, la trasformazione simile si riduce ad una omotetia. Pertanto dalle osservazioni fatte precedentemente la trasformazione simile trasforma coniche in coniche dello stesso tipo: cioè ellissi in ellissi, parabole in parabole, iperboli in iperboli e circonferenze in circonferenze.

5 TRASFORMAZIONE AFFINE E PROIETTIVA

- Trasformazione affine o affinità

Nell'impostare l'equazione della trasformazione simile abbiamo imposto tre condizioni

$$\begin{cases} \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \Delta \neq 0 \\ \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{c}^2 + \bar{d}^2 \\ \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} = 0 \end{cases}$$

Se andiamo ad eliminare tutte le condizioni fatta eccezione della prima: cioè il Δ deve mantenersi solo diverso da 0, si ha una nuova trasformazione, detta trasformazione affine, il cui sistema di equazioni

$$\mathcal{A} = \begin{cases} x' = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{p} \\ y' = \bar{c}x + \bar{d}y + \bar{q} \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta = \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} \neq 0$$

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta}[\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta}[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.$$

Δ è detto *rapporto di affinità*

Il sistema di equazioni è identicamente uguale a quello della trasformazione simile, cambiano solo le condizioni. Applicando tale trasformazione alle coniche canoniche si ottengono le stesse equazioni trovate con la similitudine: cioè

-) **ellisse:** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
con $A = (a^2\bar{c}^2 + b^2\bar{d}^2)$; $B = -2(b^2\bar{d}\bar{b} + a^2\bar{a}\bar{c})$;
 $C = (a^2\bar{a}^2 + b^2\bar{b}^2)$; $D = -2[b^2\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + a^2\bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$;
 $E = 2[b^2\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + a^2\bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$; $F = -a^2b^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2$
 $B^2 - 4AC < 0$
-) **circonferenza:** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
con $A = (\bar{c}^2 + \bar{d}^2)$; $B = -2(\bar{d}\bar{b} + \bar{a}\bar{c})$;
 $C = (\bar{a}^2 + \bar{b}^2)$; $D = -2[\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$;
 $E = 2[\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) + \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$; $F = -r^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2$
 $B^2 - 4AC < 0$
-) **parabola:** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
con $A = a\bar{d}^2$; $B = -2a\bar{d}\bar{b}$; $C = a\bar{b}^2$;
 $D = -2a\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})]$; $E = -[\bar{a}(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) - 2a\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})]$;
 $F = [a(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})^2 - (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$
 $B^2 - 4AC = 0$
-) **iperbole:** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
con $A = (-a^2\bar{c}^2 + b^2\bar{d}^2)$; $B = -2(b^2\bar{d}\bar{b} - a^2\bar{a}\bar{c})$;
 $C = (-a^2\bar{a}^2 + b^2\bar{b}^2)$; $D = -2[b^2\bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) - a^2\bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$;
 $E = 2[b^2\bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) - a^2\bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]$; $F = -a^2b^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2$
 $B^2 - 4AC > 0$

Osservazione: Le equazioni dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole sono identicamente uguali a quelle trovate con la trasformazione simile, mentre l'equazione della circonferenza ha caratteristiche uguali a quella dell'ellisse: cioè una circonferenza viene trasformata, mediante l'affinità in un'ellisse. Il fatto sta proprio nell'aver soppresso le condizioni della trasformazione simile che permettevano di imporre $A = C$ e $B = 0$ e quindi ridurla alla forma:

$$x^2 + y^2 + \bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C} = 0$$

L'affermare che la similitudine trasforma circonferenze in circonferenze è una proprietà caratterizzante la similitudine.

Proprietà

- 1) Una affinità conserva l'allineamento dei punti: cioè trasforma rette in rette
- 2) L'affinità trasforma rette parallele in rette parallele: cioè conserva il parallelismo.
- 3) In una trasformazione affine al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento corrispondente
- 4) Ogni trasformazione affine conserva il rapporto semplice di tre punti allineati: (Def. Siano A,B,C tre punti allineati , il rapporto semplice è dato da $\pm \frac{AC}{BC}$, col segno + se C è esterno al segmento AB , se $C \equiv A$ il rapporto è nullo, se $C \equiv B$ il rapporto è infinito).
- 5) In una trasformazione affine ad ogni parallelogramma corrisponde un parallelogramma.
- 6) L'affinità trasforma coniche in coniche, ma in generale non sempre dello stesso tipo.
- 7) In due figure affini il rapporto delle loro aree è uguale al rapporto di affinità: $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \Delta$

NB. Nel n° 6 si è detto che l'affinità trasforma coniche in coniche, ma in generale non sempre dello stesso tipo: infatti l'ellisse è sempre affine ad una circonferenza, anzi è equivalente ad una circonferenza avente per raggio la media geometrica dei due semiassi dell'ellisse. Abbiamo avuto modo di calcolare l'area racchiusa da un'ellisse: $\mathcal{A} = \pi ab$; così pure l'area racchiusa da una circonferenza: $\mathcal{A} = \pi r^2$. Per essere ellisse e circonferenza equivalenti le loro aree devono essere uguali : $\pi r^2 = \pi ab$, da cui ricavando r si ha $r = \sqrt{ab}$, che non è altro che il valore della media geometrica di a e b.

Mentre l'iperbole canonica è affine ad un'iperbole equilatera e la parabola normale è equivalente ad una parabola canonica.

NB. Ogni trasformazione affine è univocamente determinata da tre punti non allineati e dai loro corrispondenti: in quanto nel sistema figurano sei parametri indipendenti.

- Affinità omologica od omologia

Collegata all'affinità è l'omologia. Essa è una trasformazione del piano in sé (o tra piani sovrapposti) che ammette una retta di punti uniti, detta *asse dell'omologia*, ed un fascio di rette unite, il cui punto di intersezione è detto *centro dell'omologia*.

Se il centro dell'omologia appartiene all'asse, l'omologia si dice *omologia speciale*, in caso contrario si dice *omologia generale*.

L'omologia è individuata dal centro, dall'asse e da una coppia di elementi (punti o rette) corrispondenti: i punti corrispondenti sono allineati con il centro, mentre le rette corrispondenti si intersecano in un punto appartenente all'asse. Di importanza fondamentale è il rapporto

caratteristico dell'omologia che è il birapporto formato da due punti corrispondenti dal centro di omologia e dal punto di intersezione della retta congiungente i punti corrispondenti con l'asse. Tale rapporto rimane costante qualunque sia la coppia di punti corrispondenti considerata. Le omologie vengono classificate a seconda che il centro e l'asse siano propri od impropri: il centro è improprio quando le rette sono parallele e tale punto esprime la direzione comune alle rette, l'asse è improprio quando è costituita da punti impropri.

Si ha *omologia affine o affinità omologica* nel caso che il centro è improprio: cioè è data una direzione), e l'asse è una retta reale

Si ha *proiettività omologica* nel caso che centro e asse sono propri: punto reale e retta reale.

Def. Si chiama *affinità omologica* la trasformazione del piano in sé definita dai seguenti elementi:

-) una retta fissa \mathbf{u} , detta asse
-) una direzione assegnata \mathbf{m} , detto centro
-) due punti A e A' corrispondenti, allineati col centro o lungo la direzione assegnata

Graficamente è possibile determinare di ogni punto P il suo corrispondente P' , così operando nell'ordine:

- 1) Si traccia la retta $r(A, P)$ e si consideri il punto $Q_A = r \cap \mathbf{u}$
- 2) Si traccia la retta t passante per P e di coefficiente angolare m
- 3) Si traccia la retta $s(Q_A, A')$

e si determina il punto $P' = t \cap s$.

Questa costruzione geometrica permette di individuare i sistemi che definiscono la trasformazione omologica affine.

Siano dati

Asse: $\mathbf{u} \equiv ax + by + c$

Direzione: \mathbf{m}

Punti corrispondenti: $A(\alpha; \beta)$ e $A'(\alpha'; \beta')$

$$\mathcal{A}_\Omega = \begin{cases} x' = (1+ka)x + kby + kc \\ y' = kmax + (1+kmb)y + kmc \end{cases} \quad \text{con } k = \frac{\alpha' - \alpha}{a\alpha + b\beta + c} \quad \text{e } \Delta = (1+ka)(1+kmb) - k^2mab$$

$$\left| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{(1+kmb)x - kby - kc}{\Delta} \\ y \rightarrow \frac{-kmax + (1+ka)y - kmc}{\Delta} \end{array} \right.$$

Proprietà

L'affinità omologica essendo un'affinità conserva tutte le proprietà dell'affinità ed inoltre l'asse dell'affinità omologica è una retta fissa.

L'affinità omologica conserva il rapporto semplice: siano X ed X' due punti corrispondenti e

sia $F_X = r(X; X') \cap \mathbf{u}$, qualunque sia X ed X' il suo corrispondente, il rapporto $\frac{F_X X'}{F_X X}$ rimane costante.

- Proiettività omologica

Diamo un cenno alla proiettività omologica, visto che è stata accennata come caso della trasformazione omologica: cioè nel caso che centro e asse dell'omologia sono elementi propri del piano. Essa fa parte pure come caso speciale della trasformazione proiettiva o proiettività, che fa parte della geometria descrittiva. Relativamente alle coniche il fatto che una conica sia degenerare o non

degenere è un fatto di carattere proiettivo: cioè è un invariante della trasformazione proiettiva. La proiettività trasforma coniche in coniche ma in generale non dello stesso tipo.

Def. Si chiama *proiettività omologica* la trasformazione del piano in sé definita dai seguenti elementi: -) una retta fissa u , detta asse
 -) un punto fisso al finito S , detto centro (con S non appartenente ad u)
 -) due punti A e A' corrispondenti, allineati col centro S

Graficamente è possibile determinare di ogni punto P il suo corrispondente P' , così operando nell'ordine:

- 4) Si traccia la retta $r(A, P)$ e si consideri il punto $Q_A = r \cap u$
- 5) Si traccia la retta t passante per P e S
- 6) Si traccia la retta $s(Q_A, A')$

e si determina il punto $P' = t \cap s$.

Equazione :

Tenendo presente quanto detto, sia xOy un sistema di assi cartesiani ortogonali sul piano π e siano $u : \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$, $S(x_S; y_S)$, $A(\alpha; \beta)$ e $A'(\alpha'; \beta')$ rispettivamente l'asse, il centro ed i punti corrispondenti della trasformazione proiettività omologica del piano π in sé sotto la condizione che S, A e A' siano allineati.

Sia $P(x; y)$ un punto generico del piano π , si vogliono determinare le coordinate del punto corrispondente $P'(x'; y')$

Sia r la retta passante per P ed $A : y = \frac{\beta - y}{\alpha - x}(x - x) + y$ e sia $Q_{PA} = r \cap u$:

$$\begin{cases} \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0 \\ y = \frac{\beta - y}{\alpha - x}(x - x) + y \end{cases} \text{ le cui soluzioni sono } \begin{cases} x_q = \frac{-(\bar{b}\beta + \bar{c})x + \alpha\bar{b}y + \alpha\bar{c}}{\bar{a}x + \bar{b}y - (\bar{a}\alpha + \bar{b}\beta)} \\ y_q = \frac{\bar{a}\beta x - (\bar{a}\alpha + \bar{c})y + \beta\bar{c}}{\bar{a}x + \bar{b}y - (\bar{a}\alpha + \bar{b}\beta)} \end{cases}$$

Sia t la retta passante per P ed $S : (x - x)(y_S - y) - (x_S - x)(y - y) = 0$

Sia s la retta passante per Q_{PA} ed $A' : (x - x_q)(\beta' - y_q) - (\alpha' - x_q)(y - y_q) = 0$

Il punto corrispondente di P : P' è dato dall' intersezione di t con s :

$$\begin{cases} x' = \frac{A_1\dot{x} + B_1\dot{y} + C_1}{A\dot{x} + B\dot{y} + C} \\ y' = \frac{A_2\dot{x} + B_2\dot{y} + C_2}{A\dot{x} + B\dot{y} + C} \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha'(y_S - y_q) - x_q(y_S - \beta') & A_2 &= y_S(\beta' - y_q) & A &= \beta' - y_q \\ B_1 &= x_S(x_q - \alpha') & B_2 &= \beta'(x_q - x_S) - y_S(\alpha' - x_S) & B &= x_q - \alpha' \\ C_1 &= x_S(\alpha'y_q - \beta'x_q) & C_2 &= y_S(\alpha'y_q - \beta'x_q) & C &= y_S(\alpha' - x_q) - x_S(\beta' - y_q) \end{aligned}$$

La trasformazione inversa risulta

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\bar{A}_1 x' + \bar{B}_1 y' + \bar{C}_1}{\bar{A} x' + \bar{B} y' + \bar{C}} \\ \bar{y} = \frac{\bar{A}_2 x' + \bar{B}_2 y' + \bar{C}_2}{\bar{A} x' + \bar{B} y' + \bar{C}} \end{cases}$$

Con

$$\begin{array}{lll} \bar{A}_1 = B_2 C - B C_2 & \bar{A}_2 = A C_2 - A_2 C & \bar{A} = A_2 B - A B_2 \\ \bar{B}_1 = B C_1 - B_1 C & \bar{B}_2 = A_1 C - A C_1 & \bar{B} = A B_1 - A_1 B \\ \bar{C}_1 = B_1 C_2 - B_2 C_1 & \bar{C}_2 = A_2 C_1 - A_1 C_2 & \bar{C} = A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{array}$$

Pertanto i sistemi di equazioni generali della trasformazione proiettive omologiche sono

$$\mathcal{P} = \begin{cases} x' = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{Ax + By + C} \\ y' = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{Ax + By + C} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\bar{A}_1 x + \bar{B}_1 y + \bar{C}_1}{\bar{A} x + \bar{B} y + \bar{C}} \\ y \rightarrow \frac{\bar{A}_2 x + \bar{B}_2 y + \bar{C}_2}{\bar{A} x + \bar{B} y + \bar{C}} \end{array} \right.$$

NB. Può capitare che ad un punto proprio corrisponda un punto all'infinito o improprio: tale punto proprio è detto *punto di fuga*. L'insieme dei punti di fuga appartengono ad una retta parallela all'asse u della proiettività: questa retta è detta retta dei punti di fuga e ad essa corrisponde la retta costituita da punti all'infinito o da punti impropri. Questo permette di dire che la trasformazione proiettiva omologica è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano purché vi si includono i suoi punti all'infinito o impropri. Questo induce a parlare di piano ampliato: cioè il piano costituito da punti propri ed impropri e a considerare sistemi cartesiani sul piano omogenei: cioè un punto del piano ampliato è determinato da una terna $(x_1; x_2; x_3)$ con $x = \frac{x_1}{x_3}$ e $y = \frac{x_2}{x_3}$ se $x_3 = 0$ il punto è improprio o all'infinito, se $x_3 \neq 0$ allora il punto è proprio. Si avrà modo di incontrare tali coordinate omogenee in modo argomentato è completo in altro capitolo.

Proprietà

- 1) La proiettività omologica conserva l'allineamento dei punti: a rette corrispondono rette
- 2) La proiettività omologica conserva il birapporto di quattro punti allineati: (A, B, C, D)

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = k$$
- 3) La proiettività omologica trasforma coniche in coniche non necessariamente dello stesso tipo
- 4) La proiettività omologica non conserva il parallelismo e quindi non conserva l'ampiezza degli angoli corrispondenti.
- 5) La proiettività omologica ha un punto fisso ed una retta fissa: il centro e l'asse.

- Trasformazione proiettiva:

Più generale della proiettività omologica è la trasformazione proiettiva: infatti

Def. Si chiama trasformazione proiettiva o proiettività una trasformazione geometrica che ha come invarianti l'allineamento dei punti e il birapporto di una quaterna di punti allineati

Si è detto che la proiettività omologica è una particolare proiettività in quanto ha come invarianti l'allineamento dei punti e il birapporto, ma in più presenta un punto ed una retta fissa; la proiettività invece non presenta questi enti di fissità, pertanto essa è più generale della proiettività omologica.

Il sistema di equazioni è lo stesso di quello della proiettività omologica priva delle condizioni iniziali.

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \\ y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{dx+ey+f} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}}{dx+\bar{e}y+\bar{f}} \\ y \rightarrow \frac{\bar{a}_1x+\bar{b}_1y+\bar{c}_1}{dx+\bar{e}y+\bar{f}} \end{array} \right.$$

Con

$$\begin{array}{lll} \bar{a} = b_1f - ec_1 & \bar{a}_1 = dc_1 - fa_1 & \bar{d} = a_1e - b_1d \\ \bar{b} = ec - bf & \bar{b}_1 = fa - dc & \bar{e} = bd - ea \\ \bar{c} = bc_1 - b_1c & \bar{c}_1 = ca_1 - ac_1 & \bar{f} = b_1a - a_1b \end{array}$$

Anche questa trasformazione fa corrispondere coniche a coniche non necessariamente dello stesso tipo: infatti una stessa circonferenza cambiando punto di osservazione prospettica si può trasformare in ellisse, parabola o iperbole indifferentemente, così le altre coniche.

Esiste un'altra trasformazione del piano in sé, che andremo ad analizzare in un altro capitolo che trasforma le coniche in altre tipi di curve di ordine superiore o di ordine inferiore: questa analisi verrà organizzata alla luce di curve deducibili da coniche.

Finora applicando queste trasformazioni alle coniche canoniche si sono ottenute sempre equazioni del tipo:

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

Pertanto una conica è definita da tale equazione di secondo grado a due incognite: detta equazione generale di una conica.

6 Dall'equazione generale a quella canonica

Le trasformazioni del piano in sé ci hanno permesso di trovare l'equazione generale delle diverse coniche, partendo dall'equazione canonica di queste. Tutte le trasformazioni ci hanno permesso di individuare nell'equazione di secondo grado completa: quella che caratterizzava la conica. La distinzione delle diverse coniche veniva effettuata analizzando i coefficienti di tale equazione: infatti, data l'equazione

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

Se $B^2 - 4 A C < 0$, l'equazione è la trasformata di un'ellisse canonica

Se $B^2 - 4 A C = 0$, l'equazione è la trasformata di una parabola canonica

Se $B^2 - 4 A C > 0$, l'equazione è la trasformata di una iperbole canonica

Se $B^2 - 4 A C < 0$ e $B = 0$ e $A = C$, l'equazione è la trasformata di una circonferenza canonica

Se $B \neq 0$, la conica canonica nella trasformazione a subito una rotazione

Se $B = 0$ e ($D \neq 0$ o $C \neq 0$), la conica canonica nella trasformazione a subito una traslazione

Se $F = 0$, l'origine del sistema cartesiano è un punto della conica: infatti andando a sostituire le coordinate dell'origine si ottiene un'identità $0 = 0$: cioè l'origine soddisfa il teorema di appartenenza di un punto ad una curva.

Facendo memoria di queste considerazioni in presenza di un'equazione di secondo grado a due incognite, noti i coefficienti possiamo individuare il tipo di conica e a quali trasformazioni è stata sottoposta. E' importante ora poter trasformare l'equazione generale in equazione canonica. In questo capitolo tratteremo l'argomento col metodo delle trasformazioni isometriche: rotazione e traslazione, della geometria analitica, nel successivo capitolo tratteremo l'argomento col metodo degli invarianti topologici o delle matrici.

Ricerca dell'equazione canonica

Sia data l'equazione generale

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

Applichiamo dapprima ad essa la trasformazione isometrica

Rotazione: ρ_0^α :

$$\rho_0^\alpha = \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \end{array} \begin{array}{l} x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{array}$$

$$A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + B (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) + C (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + F = 0$$

Da cui elevando al quadrato e moltiplicando e raccogliendo, si ha:

$$a) (A \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha) x^2 + (2A \sin \alpha \cos \alpha + B \cos^2 \alpha - B \sin^2 \alpha +$$

$$-2C\text{sen}\alpha \cos\alpha) xy + (A\text{sen}^2\alpha + B \text{sen}\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha) y^2 + \\ (D \cos\alpha - E \text{sen}\alpha) x + (D \text{sen}\alpha + E \cos\alpha) y + F = 0$$

Poiché si vuole rendere la conica non ruotata è necessario annullare il coefficiente del termine misto: xy , vale a dire:

$$2A\text{sen}\alpha \cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\text{sen}^2\alpha - 2C\text{sen}\alpha \cos\alpha = 0$$

Tenendo conto delle formule di duplicazione della goniometria, cioè $2\text{sen}\alpha \cos\alpha = \text{sen}2\alpha$ e

$\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos2\alpha$, e sostituendo si ha

$$(A - C) \text{sen}2\alpha + B \cos2\alpha = 0$$

Sotto la condizione che $\cos2\alpha \neq 0$, dividiamo ambo i termini dell'ultima equazione per $\cos2\alpha$:

$$(A - C) \frac{\text{sen}2\alpha}{\cos2\alpha} + B = 0$$

Ma per la definizione di goniometria $\frac{\text{sen}2\alpha}{\cos2\alpha} = \text{tag}2\alpha$, sostituendo ed isolando si ha

$$\text{Tag}2\alpha = \frac{B}{C-A}, \text{ da cui } \alpha = \frac{1}{2} \text{arctag} \frac{B}{C-A}$$

NB. Se il valore dell'angolo α è positivo, andiamo a sostituire tale valore nell'espressione a), se il valore di α è negativo, il valore da sostituire in a) sarà il suo complementare: $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Otteniamo così la seguente equazione:

$$A^*x^2 + C^*y^2 + D^*x + E^*y + F = 0$$

Con

$$A^* = A\cos^2\alpha - B \text{sen}\alpha \cos\alpha + C \text{sen}^2\alpha$$

$$C^* = A\text{sen}^2\alpha + B \text{sen}\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha$$

$$D^* = D \cos\alpha - E \text{sen}\alpha$$

$$E^* = D \text{sen}\alpha + E \cos\alpha$$

Nel caso che la conica generale è una parabola allora $C^* = 0$, altrimenti è $\neq 0$. Pertanto relativamente alle coniche a centro (ellisse e iperbole) si va prima alla ricerca del centro e successivamente si applica la trasformazione isometrica: traslazione; relativamente alla parabola si trova il vertice e si applica la traslazione. Distinguiamo due casi.

a) Caso delle coniche a centro:

Come si è visto nel cap. III le coordinate del centro sono $x_c = -\frac{D^*}{2A^*}$ e $y_c = -\frac{E^*}{2C^*}$

Applicando la trasformazione:

$$\text{Traslazione di vettore } \vec{v}(-x_c; -y_c): \quad T\vec{v} = \begin{cases} x' = x - x_c \\ y' = y - y_c \end{cases}$$

Si ha:

$$A^*(x + x_c)^2 + C^*(y + y_c)^2 + D^*(x + x_c) + E^*(y + y_c) + F = 0$$

Da cui elevando al quadrato e moltiplicando e raccogliendo, si ha:

$$A^* x^2 + C^* y^2 + (D^* + 2A^* x_c) x + (E^* + 2C^* y_c) y + A^* x_c^2 + C^* y_c^2 + D^* x_c + E^* y_c + F = 0$$

Sostituendo a x_c ed a y_c i loro valori, si ha:

$$A^* x^2 + C^* y^2 - \frac{D^*}{4A^*} - \frac{E^*}{4C^*} + F = 0$$

Posto $F^* = -\left(-\frac{D^*}{4A^*} - \frac{E^*}{4C^*} + F\right)$ e sostituendo, si ha:

$$A^* x^2 + C^* y^2 - F^* = 0$$

Equazione facilmente trasformabile equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{nel caso che } C^* > 0; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{nel caso che } C^* < 0$$

$$\text{con } a = \sqrt{\frac{F^*}{A^*}} \quad \text{e } b = \sqrt{\frac{F^*}{C^*}} \quad \text{e con } \frac{F^*}{A^*} > 0 \quad \text{e } \frac{F^*}{C^*} > 0$$

b) Caso della parabola:

Posto $A \neq 0$ e $C = 0$, per essere $B^2 - 4AC = 0$ ed esplicitando rispetto alla x si ha

$$y = -\frac{A^*}{E^*} x^2 - \frac{D^*}{E^*} x - \frac{F}{E^*}$$

Le coordinate del vertice sono:

$$x_v = -\frac{D^*}{2A^*} \quad \text{e } y_v = \frac{D^{*2} - 4A^*F}{4A^*E^*}$$

Applicando la trasformazione:

Traslazione di vettore $\vec{v}(-x_v; -y_v)$:

$$\mathbf{T}\vec{v} = \begin{cases} x' = x - x_v \\ y' = y - y_v \end{cases}$$

Si ha:

$$A^* (x + x_v)^2 + D^* (x + x_v) + E^* (y + y_v) + F = 0$$

Da cui elevando al quadrato e moltiplicando e raccogliendo, si ha:

$$A^* x^2 + (D^* + 2A^* x_v) x + E^* y + A^* x_v^2 + D^* x_v + E^* y_v + F = 0$$

Sostituendo a x_c ed a y_c i loro valori, si ha:

$$A^* x^2 + E^* y = 0$$

Esplicitando rispetto alla x si ha $y = -\frac{A^*}{E^*} x^2$; posto $a = -\frac{A^*}{E^*}$ e sostituendo si ottiene l'equazione canonica della parabola: $y = a x^2$.

NB. Nell'avvio a questo caso si è posto $A \neq 0$ e $C = 0$, si poteva porre $A = 0$ e $C \neq 0$, applicando lo stesso procedimento si arrivava alla seguente conclusione $x = a y^2$. Ancora l'equazione di una parabola simmetrica della prima rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del sistema xOy .

Sintesi

Le equazioni trovate risultano le equazioni di coniche canoniche isometriche alle coniche definite da quella generale.

Esercizi guidati:

- 1) Data l'equazione della conica $4x^2 - 4xy + y^2 - 20x - 40y = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenera, l'equazione canonica, punti e rette notevoli, infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione:

Per determinare il tipo calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione della conica: $\Delta = 16 - 16 = 0$. Si tratta di una parabola.

Per stabilire se sia degenera , il polinomio dell'equazione della conica deve essere decomponibile in fattori polinomiali di primo grado: cerchiamo una possibile decomposizione

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 20x - 40y = (2x - y)^2 - 20(x + 2y)$$

I due monomi non presentano fattori comuni quindi è impossibile scomporre in fattori.

Pertanto si tratta di una parabola non degenera: : cioè il polinomio presente nell'equazione non è decomponibile in fattori di primo grado e la parabola non è riducibile a rette parallele.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero , la parabola è ruotata; poiché il termine noto dell'equazione è zero, la parabola passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una parabola non degenera, ruotata e passante per l'origine del sistema cartesiano

Ricerca dell'equazione canonica.

Poiché la parabola è ruotata, applichiamo una trasformazione rotazionale in modo da eliminare il termine misto: $-4xy$. Sia

$$\rho = \begin{cases} x' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y' = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\ y \rightarrow -X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}$$

Le equazioni della trasformazione e applichamole alla nostra conica.

$$4(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)^2 - 4(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + (-X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + \\ -20(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) - 40(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) = 0$$

Dopo sviluppato i quadrati e moltiplicato i binomi, impongo che la somma dei monomi contenenti il fattore misto xy sia uguale a zero:

$$8XY\cos\alpha\sin\alpha - 4XY\cos^2\alpha + 4XY\sin^2\alpha - 2XY\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Sommando i monomi simili e dividendo per XY , si ottiene

$$6\cos\alpha\sin\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

Applicando le formule goniometriche di duplicazione, si ha

$$3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = 0$$

Dividendo per $\cos 2\alpha \neq 0$, si ha $3\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - 4 = 0$; da cui $3\tan 2\alpha - 4 = 0$: $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$

Ricordando le formule di trasformazione goniometriche, si ha

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{3}{5}$$

Ricordando le formule goniometriche di bisezione, si ha

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sostituendo detti valori nel sistema rotazionale, si ha

$$\rho = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) \\ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) \end{cases}$$

$$4\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)\right]^2 - 4\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y)\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y)\right]^2 + \\ -20\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)\right] - 40\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y)\right] = 0$$

Operando ed eliminando i monomi misti si ha:

$$\frac{16x^2}{5} + \frac{4y^2}{5} + \frac{8x^2}{5} - \frac{8y^2}{5} + \frac{x^2}{5} + \frac{4y^2}{5} - 8\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$$

$$5x^2 - 20\sqrt{5}y = 0$$

Da cui l'equazione canonica: $y = \frac{\sqrt{5}}{20}x^2$.

Ricerca asse

L'asse relativo alla forma canonica è $x = 0$, applicando a questa equazione la trasformazione

$$\rho^{-1} = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) \\ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{cases}$$

Otteniamo l'asse della conica data

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) = 0 \rightarrow 2X - Y = 0$$

Ricerca Vertice

Il vertice della forma canonica è $V \equiv O(0; 0)$, applicando a questo punto la trasformazione ρ^{-1} , si ha $V(0; 0)$ ancora coincidente con l'origine.

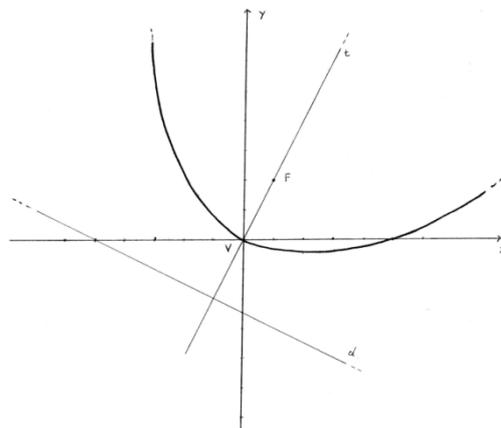
Ricerca fuoco.

Il fuoco della forma canonica è $F(0; \sqrt{5})$, applicando a questo punto la trasformazione ρ^{-1} , si ha $F(1; 2)$

Ricerca direttrice

La direttrice relativa alla forma canonica è $d \equiv y = -\sqrt{5}$, applicando a questa equazione la trasformazione ρ^{-1} , si ha $d \equiv \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) = -\sqrt{5} \rightarrow X + 2Y + 5 = 0$

Grafico della conica data



- 2) Data l'equazione della conica $x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenera, equazione canonica, punti e rette notevoli, infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione

Per stabilire il *tipo* di conica calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione: $\Delta = 64 - 28 = 36$. Poiché $\Delta > 0$, la conica è un'iperbole. Per stabilire se la conica è o non è degenera, calcoliamo le soluzioni dell'equazione di secondo grado rispetto alla variabile y e poi decomponiamo il polinomio nella forma $a(y - y_1)(y - y_2)$:

$$y_{1,2} = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{16x^2 - 7(x^2 + 4x - 4)}}{7} = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{9x^2 - 28x + 28}}{7}$$

Le soluzioni sono ancora polinomi in x di secondo grado irrazionali e pertanto l'equazione della conica non è decomponibile in fattori polinomiali di primo grado. Pertanto l'iperbole non è degenera.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero, l'iperbole è ruotata; poiché i coefficienti dei monomi dove le variabili compaiono a primo grado sono diversi da zero, l'iperbole è traslata; poiché il termine noto dell'equazione è diverso da zero, l'iperbole non passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una iperbole non degenera, ruotata, traslata e non passante per l'origine del sistema cartesiano.

NB Si è detto che questa iperbole è ruotata e traslata: cioè il grafico che andremo a tracciare, rispetto al grafico della forma canonica isometrica ad essa, presenta gli assi ruotati rispetto agli assi cartesiani e che il suo centro non coincide con il centro del sistema di riferimento

Ricerca dell'equazione canonica.

Poiché l'iperbole è ruotata, applichiamo una trasformazione rotazionale in modo da eliminare il termine misto: $-8xy$. Sia

$$\rho = \begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ y \rightarrow -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

Le equazioni della trasformazione e applichiamo alla nostra conica.

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)^2 - 8(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + 7(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + 4(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + 2(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) - 4 = 0$$

Dopo sviluppato i quadrati e moltiplicato i binomi, impongo che la somma dei monomi contenenti il fattore misto xy sia uguale a zero:

$$2XY\cos\alpha\sin\alpha - 8XY\cos^2\alpha + 8XY\sin^2\alpha - 14XY\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Sommando i monomi simili e dividendo per XY , si ottiene

$$-12\cos\alpha\sin\alpha - 8(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

Applicando le formule goniometriche di duplicazione, si ha

$$-6\operatorname{sen}2\alpha - 8\operatorname{cos}2\alpha = 0$$

Dividendo per $\operatorname{cos}2\alpha \neq 0$, si ha $-6\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{cos}2\alpha} - 8 = 0$; da cui $3\operatorname{tang}2\alpha + 4 = 0$: $\operatorname{tang}2\alpha = -\frac{4}{3}$

Ricordando le formule di trasformazione goniometriche, si ha

$$\operatorname{Cos}2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{3}{5}$$

Ricordando le formule goniometriche di bisezione, si ha

$$\operatorname{Sen}\alpha = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cos}2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \operatorname{cos}\alpha = \sqrt{\frac{1+\operatorname{cos}2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sostituendo detti valori nel sistema rotazionale, si ha

$$\rho = \frac{\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) \end{cases}}{\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{cases}}$$

Sostituendo nell'equazione, si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}(2X - Y)^2 - \frac{8}{5}(2X - Y)(X + 2Y) + \frac{7}{5}(X + 2Y)^2 + \\ & + \frac{4}{\sqrt{5}}(2X - Y) + \frac{2}{\sqrt{5}}(X + 2Y) - 4 = 0 \end{aligned}$$

Sviluppando ed eliminando i termini misti si ha

$$4X^2 + Y^2 - 16X^2 + 16Y^2 + 7X^2 + 28Y^2 + 8\sqrt{5}X - 4\sqrt{5}Y + 2\sqrt{5}X + 4\sqrt{5}Y - 20 = 0$$

Sommando i monomi simili, si ottiene l'iperbole non ruotata

$$-5X^2 + 45Y^2 + 10\sqrt{5}X - 20 = 0$$

Dividendo per -5 si ha

$$X^2 - 9Y^2 - 2\sqrt{5}X + 4 = 0$$

Il centro di questa iperbole traslata è $C(\sqrt{5}; 0)$, applico una traslazione di vettore

$$\vec{v}(-\sqrt{5}; 0): \begin{cases} X \rightarrow X + \sqrt{5} \\ Y \rightarrow Y \end{cases}, \quad (X + \sqrt{5})^2 - Y^2 - 2\sqrt{5}(X + \sqrt{5}) + 4 = 0$$

Sviluppando e sommando i monomi simili si ha: $X^2 - 9Y^2 - 1 = 0$

Da cui l'equazione canonica in forma normale in forma:

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$$

Semiassse trasverso $a = 1$, semiassse secondario $b = \frac{1}{3}$, semidistanza focale $c = \frac{\sqrt{10}}{3}$,

eccentricità $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$

Ricerca assi

Le equazioni degli assi dell'iperbole nella forma canonica sono: $x = 0$ e $y = 0$, applicando ad esse la trasformazione roto-traslatoria :

$$T \equiv \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) + \sqrt{5} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \sqrt{5} \\ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) \end{cases}$$

si hanno gli assi della conica data:

$$2x + y - 5 = 0 \quad ; \quad x - 2y = 0$$

Ricerca del centro

Le coordinate del centro della conica data sono date dall'intersezione degli assi:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad C(2; 1)$$

Ricerca fuochi

La distanza focale dell'iperbole in forma canonica è $c = \frac{\sqrt{10}}{3}$; i fuochi appartengono all'asse trasverso: $x - 2y = 0$ e pertanto le loro coordinate sono $F(2\alpha; \alpha)$, applicando la distanza $CF = \frac{\sqrt{10}}{3}$,

calcoliamo α : $\sqrt{(2 - 2\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, risolvendo si hanno $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$

I fuochi hanno coordinate: $F_1 = (2 - \frac{2\sqrt{10}}{3}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{3})$, $F_2 = (2 + \frac{2\sqrt{10}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{10}}{3})$

Ricerca asintoti

Gli asintoti della forma canonica sono $x - 3y = 0$ e $x + 3y = 0$, applicando ad esse la trasformazione roto-traslatoria T , si hanno le equazioni

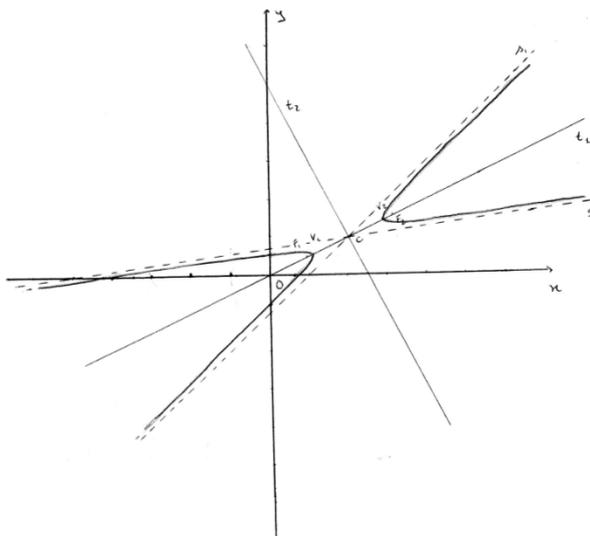
$$x - y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x - 7y + 5 = 0$$

Ricerca vertici

Le coordinate dei vertici sono dati dall'intersezione dell'iperbole data con l'asse trasverso:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_1 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$



$$\mathbf{V}_1 = \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}; 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \quad \mathbf{V}_2 = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}; 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

- 3) Data l'equazione della conica $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenera, equazione canonica, punti e rette notevoli, infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione

Per stabilire il *tipo* di conica calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione: $\Delta = 4 - 196 = -192$. Poiché $\Delta < 0$, la conica è un'ellisse. Per stabilire se la conica è o non è degenera, cerchiamo di decomporre se è possibile il polinomio a primo membro: la scomposizione di tale polinomio può essere effettuata o associando a due a due i monomi o a tre a tre. Qualunque tentativo si effettui non si arriva a capo di nulla. Pertanto il polinomio non è decomponibile in fattori polinomiali di primo grado e quindi la conica non è degenera.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero, l'ellisse è ruotata; poiché i coefficienti dei monomi dove le variabili compaiono a primo grado sono diversi da zero, l'ellisse è traslata; poiché il termine noto dell'equazione è diverso da zero, l'ellisse non passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una ellisse non degenera, ruotata, traslata e non passante per l'origine del sistema cartesiano.

Ricerca dell'equazione canonica.

Poiché l'ellisse è ruotata, applichiamo una trasformazione rotazionale in modo da eliminare il termine misto: $-2xy$. Sia

$$\rho = \begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ y \rightarrow -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

Le equazioni della trasformazione e applichamole alla nostra conica.

$$7(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)^2 - 2(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + 7(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + 34(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + 2(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + 31 = 0$$

Dopo sviluppato i quadrati e moltiplicato i binomi, impongo che la somma dei monomi contenenti il fattore misto xy sia uguale a zero:

$$14XY\cos\alpha\sin\alpha - 2XY\cos^2\alpha + 2XY\sin^2\alpha - 14XY\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Sommando i monomi simili e dividendo per XY , si ottiene

$$-2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

Applicando le formule goniometriche di duplicazione, si ha

$$-2\cos 2\alpha = 0$$

Risolvendo, si ha $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, da cui $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{Sen} \alpha = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sostituendo detti valori nel sistema rotazionale, tenendo presente che la rotazione avviene in senso inverso, si ha

$$\rho = \begin{cases} X' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ Y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} X \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ Y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{array} \right.$$

Sostituendo nell'equazione, si ha

$$\frac{7}{2}(X - Y)^2 - \frac{2}{2}(X - Y)(X + Y) + \frac{7}{2}(X + Y)^2 + \frac{34}{\sqrt{2}}(X - Y) + \frac{2}{\sqrt{2}}(X + Y) + 31 = 0$$

Sviluppando ed eliminando i termini misti si ha

$$7X^2 + 7Y^2 - 2X^2 + 2Y^2 + 7X^2 + 7Y^2 + 34\sqrt{2}X - 34\sqrt{2}Y + 2\sqrt{2}X + 2\sqrt{2}Y + 62 = 0$$

Sommando i monomi simili, si ottiene l'iperbole non ruotata

$$12X^2 + 16Y^2 + 36\sqrt{2}X - 32\sqrt{2}y + 62 = 0$$

Il centro di questa ellisse traslata è $C\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, applico una traslazione di vettore

$$\vec{v}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right): \left\| \begin{array}{l} X \rightarrow X - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ Y \rightarrow Y + \sqrt{2} \end{array} \right.,$$

$$12\left(X - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 16(Y + \sqrt{2})^2 + 34\sqrt{2}\left(X - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) - 32\sqrt{2}(Y + \sqrt{2}) + 62 = 0$$

Sviluppando e sommando i monomi simili si ha: $12X^2 + 16Y^2 - 24 = 0$

Da cui l'equazione canonica in forma normale in forma:

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

Semiassse maggiore $a = \sqrt{2}$, semiassse minore $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, semidistanza focale $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
eccentricità $e = \frac{1}{2}$

Ricerca assi

Le equazioni degli assi dell'ellisse nella forma canonica sono: $x = 0$ e $y = 0$, applicando ad esse la trasformazione roto-traslatoria:

$$T \equiv \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) - \frac{5}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

si hanno gli assi della conica data:

asse maggiore $x - y + 2 = 0$

asse minore $x + y + 3 = 0$

Ricerca del centro

Le coordinate del centro della conica data sono date dall'intersezione degli assi:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad C\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Ricerca fuochi

Le coordinate dei fuochi dell'ellisse in forma canonica sono: $F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ e $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, applicando la trasformazione roto-traslatoria T si ha: **$F_1(-3; -1)$ e $F_2(-2; 0)$** .

Ricerca vertici

Le coordinate dei vertici sono dati dall'intersezione dell'ellisse data con l'asse maggiore:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} \\ y_1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

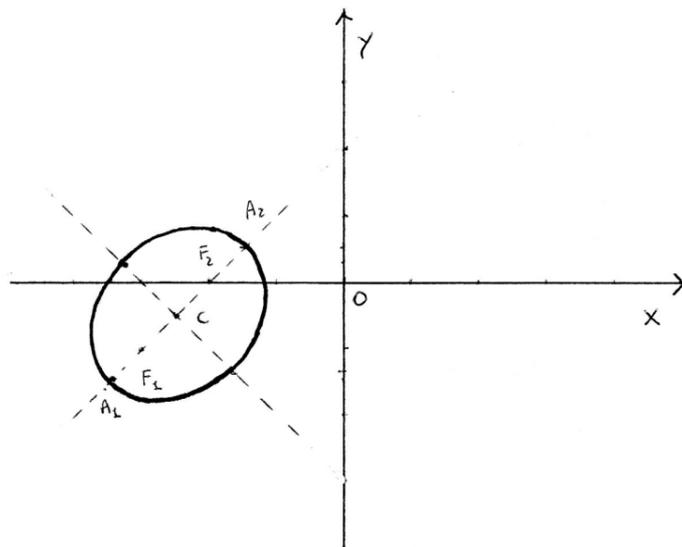
$$A_1 = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right), \quad A_2 = \left(-\frac{3}{2}; +\frac{1}{2}\right)$$

e con l'asse minore:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}-5}{2} \\ y_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$B_1 = \left(-\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right), \quad B_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-5}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Grafico:



7 Appendice

Uso di cambio di variabile in Algebra prima dell'avvento della Geometria Analitica:

Nel XVI secolo Tartaglia, Cardano, Ruffini, Scipione del Ferro, Viète nella risoluzione di un'equazione completa di terzo grado e di quarto grado usavano una particolare strategia quella di ridurre ad una forma più semplice, mediante un cambio di variabile, e risolvevano l'equazione trasformata per poi ritornare a calcolare il valore dell'incognita con un procedimento a ritroso.

Infatti data l'equazione completa di terzo grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, Cardano pone $x = y - \frac{b}{3a}$ e

sostituisce nell'equazione : $a(y - \frac{b}{3a})^3 + b(y - \frac{b}{3a})^2 + c(y - \frac{b}{3a}) + d = 0$. Da questa operando

algebricamente : $ay^3 - by^2 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d\right) = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

e ponendo $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}$, Cardano ottiene l'equazione trasformata:
 $y^3 + p y = q$.

Successivamente pone $y = u - v$ con $u \cdot v = \frac{p}{3}$ e sostituisce nell'equazione :

$$(u - v)^3 + p(u - v) = q$$

Da questa operando algebricamente: $u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv = q$, e sostituendo $u \cdot v = \frac{p}{3}$,

ottiene $u^3 - pu + pv - v^3 + pu - pv = q$. Eliminando i monomi simili ed opposti, ottiene

$u^3 - v^3 = q$. Cardano ricava il valore di v da $u \cdot v = \frac{p}{3}$: cioè $v = \frac{p}{3u}$ e lo sostituisce nell'ultima

equazione, ottenendo $u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = q$, da cui operando algebricamente ricava

$$u^6 - q u^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Questa equazione è un'equazione trinomia e la risolve $u^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

e per simmetria $v^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Quindi tralascia il valore negativo dei

valori di u^3 e v^3 e ottiene la soluzione di $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ed

infine trova

La soluzione generale $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$

Questa strategia nel tempo si dimostrò fruttuosa. Con l'avvento della Geometria Analitica questo cambio di variabili assunse un significato grafico-geometrico interessante: equazioni espresse in forma diversa ma sempre dello stesso grado soggette a determinati cambi di variabili e ridotte a forma più semplice, definivano la stessa curva collocata in modo diverso sul piano di tracciamento. Nasceva così il capitolo delle "Trasformazioni del piano in sé" in geometria analitica, che sfruttavano dapprima i movimenti rigidi del piano studiate in geometria elementare e successivamente con lo studio delle proprietà delle figure, che soggette a trasformazioni restavano invariate, si ampliò lo studio delle trasformazioni fino ad includere l'inversione circolare e la proiezione: anzi con l'avvento delle geometrie non-euclidee e successivamente di altri tipi di geometria: Klein per fare ordine sfruttò le proprietà invarianti e la teoria dei gruppi delle trasformazioni per definire le geometrie: per es. la geometria euclidea è caratterizzata dal gruppo delle trasformazioni isometriche e simili. Pertanto dalla trasformazione analitica che consisteva nel far dipendere alcune variabili da altre, si è passati in geometria alla corrispondenza biunivoca fra punti di piani diversi o dello stesso piano: ancora algebra e geometria mediante un sistema di coordinate si interscambiano il ruolo dello studio di curve..

In questo capitolo tratteremo come determinare le coordinate dei punti notevoli di una conica: centro, vertici, fuochi; le equazioni di rette notevoli: assi, asintoti, diametri, rette tangenti
Divideremo questo capitolo in due parti una relativa a metodi di geometria proiettiva e l'altra a metodi matriciali

1 Elementi di geometria proiettiva

Prima di accingerci a tale indagine introdurremo alcuni elementi caratteristici della trasformazione proiettiva: cioè le coordinate omogenee del piano (ampliato) per includere i punti all'infinito, visto che la parabola e l'iperbole sono curve aperte al finito e che l'asse della prima conica e gli asintoti per la seconda presentano direzioni determinate.

Punti impropri e rette improprie:

Elementi impropri: Due rette (distinte) di un piano o sono incidenti in un punto o sono parallele: cioè hanno la stessa direzione. Questo può così enunciarsi:

“ due rette (distinte) di un piano hanno in comune un punto oppure hanno in comune la direzione ”

Nello spazio si presenta una circostanza analoga:

“ Due piani (distinti) hanno in comune una retta oppure hanno in comune una giacitura “

Nella prima affermazione si passa da una alternativa all'altra con la sostituzione di *punto* con *direzione*; nella seconda con la sostituzione di *retta* con *giacitura*. Questa circostanza ha indotto i matematici a chiamare la direzione ancora punto e la giacitura ancora retta, ma per distinguere il significato di questa nuova accezione hanno aggiunto l'aggettivo improprio. Pertanto un punto ed una retta con significato tradizionale della geometria elementare sono chiamati punto proprio e retta propria, mentre direzione e giacitura sono chiamate rispettivamente punto improprio e retta impropria.

Retta ampliata

Def. 1) Si dice retta ampliata ogni retta propria considerata come insieme dei suoi punti propri e del suo punto improprio.

Il punto improprio o direzione di una retta propria si è soliti chiamare *punto all'infinito*. Partendo dalla geometria elementare la retta propria è infinita ed illimitata, questo ci permette di affermare che la retta propria è aperta, mentre la retta ampliata includendo il punto improprio è chiusa. Quest'ultimo concetto ha indotto i matematici in geometria proiettiva a considerare la retta ampliata come una circonferenza a raggio infinito o una linea a curvatura costante pari a zero.

Piano ampliato

Def. 2) Si dice piano ampliato ogni piano (proprio) considerato come insieme dei suoi punti propri ed impropri e come insieme delle sue rette proprie e della sua retta impropria

La retta impropria o giacitura di un piano proprio si è soliti chiamare *retta all'infinito*. Tale retta impropria è costituita da tutti i punti impropri del piano.

Nel piano ampliato tutte le rette sono incidenti a due a due: nel caso che il punto è improprio le rette sono parallele, nel caso che il punto è proprio le due rette sono incidenti nell'asserzione della geometria elementare. Così pure due punti individuano una retta: se i due punti sono impropri la retta è la retta impropria, se uno è proprio e l'altro è improprio la retta è una retta avente una data direzione e passante per il punto proprio, se i due punti sono propri la retta è una retta propria.

Coordinate omogenee sul piano

Fissato in un piano un riferimento cartesiano xOy , si dicono coordinate cartesiane omogenee o semplicemente coordinate omogenee di un punto P ogni terna di numeri reali $(x_1; x_2; x_3)$ tali che

$$1) \quad x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

siano le coordinate cartesiane di P .

Se la coordinata omogenea $x_3 = 0$, allora il punto P è improprio; in questo caso x_1 ed x_2 sono i parametri direttori della retta passante per P . Il punto improprio viene indicato con $P_\infty(x_1; x_2; 0)$

oppure, posto $m = \frac{x_2}{x_1}$, $P_\infty(1; m; 0)$.

Se la coordinata omogenea $x_3 \neq 0$, allora il punto è proprio.

Viceversa

Fissato nel piano un riferimento cartesiano xOy , e considerato l'insieme delle terne ordinate di numeri reali $(x_1; x_2; x_3)$ con esclusione della terna $(0; 0; 0)$,

- una terna con $x_3 \neq 0$ e tutte le terne equivalenti $(\rho x_1; \rho x_2; \rho x_3)$ con $\rho \neq 0$ sono le coordinate omogenee di un punto proprio, avente per coordinate cartesiane (x, y) numeri definiti dalla relazione 1).
- Una terna con $x_3 = 0$ e tutte le terne equivalenti $(\rho x_1; \rho x_2; 0)$ con $\rho \neq 0$ sono le coordinate del punto improprio di parametri direttori $\rho x_1; \rho x_2$.

Equazione di una retta in coordinate omogenee:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

a cui corrisponde in coordinate cartesiane :

$$ax + by + c = 0$$

L'equazione della retta impropria è $x_3 = 0$.

Equazione di una conica generale in coordinate omogenee:

$$2) \quad Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0$$

Forma bilineare associata ad una conica

Data l'equazione 2) di una conica associamo a due punti $P'(x'_1; x'_2; x'_3)$ e $P''(x''_1; x''_2; x''_3)$ il numero reale dato

$$\varphi(P', P'') = Ax'_1x''_1 + \frac{B}{2}(x'_1x''_2 + x'_2x''_1) + Cx'_2x''_2 + \frac{D}{2}(x'_1x''_3 + x'_3x''_1) + \frac{E}{2}(x'_2x''_3 + x'_3x''_2) + Fx'_3x''_3$$

Def. 3) La corrispondenza fra la coppia (P', P'') e $\varphi(P', P'')$: cioè $\varphi: (P'; P'') \rightarrow \varphi(P'; P'')$, è detta *forma bilineare associata all'equazione 2) della conica*.

Tale forma bilineare gode delle seguenti proprietà:

-) La forma bilineare φ è simmetrica rispetto ai due punti: $\varphi(P', P'') = \varphi(P'', P')$.
-) Un punto P appartiene alla conica se e solo se la forma bilineare è zero: $\varphi(P, P) = 0$

Def. 4) Dato un P' del piano, il luogo dei punti P, tali che $\varphi(P', P) = 0$ è una retta, detta *retta polare di P'*:

$$Ax'_1x_1 + \frac{B}{2}(x'_1x_2 + x'_2x_1) + Cx'_2x_2 + \frac{D}{2}(x'_1x_3 + x'_3x_1) + \frac{E}{2}(x'_2x_3 + x'_3x_2) + Fx'_3x_3 = 0$$

2 Elementi caratteristici di una conica.

Nel capitolo secondo nelle sintesi alle varie coniche canoniche abbiamo trovato i punti e le rette notevoli con relative coordinate ed equazioni; ora vogliamo determinare i punti notevoli e le rette notevoli relative alla conica generale. In questo contesto le coordinate omogenee ci aiuteranno a ridurre la complessità dei calcoli. Diamo tre definizioni e le relazioni che da esse si deducono che ci serviranno:

Def. 5) Si chiama *diametro* di una conica la retta polare di un punto improprio (polo) rispetto alla conica stessa.

Tutti i diametri di una conica a centro passano da detto centro, per la parabola i diametri sono paralleli all'asse della parabola.

Def. 6) Due diametri si dicono *coniugati* rispetto ad una conica, quando uno passa per il polo dell'altro.

Il diametro coniugato ad un punto improprio, distinto da una direzione asintotica, è il luogo dei punti medi delle corde appartenenti al fascio di rette individuate dal punto improprio.

Def. 7) Due diametri si dicono *ortogonali* quando il coefficiente angolare dell'uno è l'inverso e l'opposto del coefficiente angolare dell'altro

Da queste definizioni è possibile determinare l'equazione di un diametro e le condizioni che ci permettono di affermare quando due diametri sono coniugati o sono ortogonali.

Sia data intanto l'equazione generale della conica in coordinate omogenee:

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0$$

Sia $P(1, m, 0)$ un punto improprio, la polare di detto punto rispetto alla conica è:

$$Ax_1 + \frac{B}{2}(mx_1 + 1x_2) + Cmx_2 + \frac{D}{2}(0x_1 + 1x_3) + \frac{E}{2}(0x_2 + mx_3) + F0x_3 = 0$$

Da cui l'equazione del diametro di polo P

$$Ax_1 + \frac{B}{2}mx_1 + \frac{B}{2}x_2 + Cmx_2 + \frac{D}{2}x_3 + \frac{E}{2}mx_3 = 0$$

Se $P' (1, m', 0)$ è la direzione del diametro coniugato della direzione di P, allora P' deve appartenere alla polare di P: cioè

$$A \cdot 1 + \frac{B}{2}m \cdot 1 + \frac{B}{2}m' + Cm \cdot m' + \frac{D}{2} \cdot 0 + \frac{E}{2}m \cdot 0 = 0$$

Da cui la relazione che deve essere soddisfatta perché i due diametri di polo P e P' siano coniugati $Cmm' + \frac{B}{2}(m + m') + A = 0$

Se $m' = -\frac{1}{m}$, allora i due diametri risultano coniugati ed ortogonali: la relazione diventa:

$$Cm \left(-\frac{1}{m}\right) + \frac{B}{2} \left(m - \frac{1}{m}\right) + A = 0$$

Da cui operando si ha

$$\frac{B}{2}m^2 + (A - C)m - \frac{B}{2} = 0$$

Considerando l'ultima relazione come un'equazione di secondo grado nella variabile m, le soluzioni determinano due direzioni coniugate ed ortogonali rispetto alla conica generale..

- **Ellisse ed iperbole.**

Ricerca coordinate del centro:

Considerato che tutti i diametri di una conica a centro passano per il centro, scegliamo due direzioni particolari $P_\infty(1; 1; 0)$ e $P'_\infty(1, 2, 0)$ e determiniamo le loro polari rispetto alla conica generale :

$d_1(P_\infty) = Ax_1 + \frac{B}{2}(x_1 + x_2) + Cx_2 + \frac{D}{2}x_3 + \frac{E}{2}x_3 = 0$, ridotta in forma cartesiana normale si ha:

$$d_1 = \left(A + \frac{B}{2}\right)x + \left(\frac{B}{2} + C\right)y + \frac{D}{2} + \frac{E}{2} = 0$$

$d_2(P'_\infty) = Ax_1 + \frac{B}{2}(2x_1 + x_2) + C2x_2 + \frac{D}{2}x_3 + \frac{E}{2}2x_3 = 0$, ridotta in forma cartesiana normale si ha

$$d_2 = (A + B)x + \left(\frac{B}{2} + 2C\right)y + \frac{D}{2} + E = 0$$

Il centro è dato dall'intersezione dei due diametri:

$$\begin{cases} \left(A + \frac{B}{2}\right)x + \left(\frac{B}{2} + C\right)y + \frac{D}{2} + \frac{E}{2} = 0 \\ (A + B)x + \left(\frac{B}{2} + 2C\right)y + \frac{D}{2} + E = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare col metodo di Cramer si ha:

$$x = \frac{B \cdot E - 2 C \cdot D}{4 A \cdot C - B^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{D \cdot B - 2 A \cdot E}{4 A \cdot C - B^2}$$

Pertanto le coordinate del centro sono

$$\begin{cases} x_c = \frac{B \cdot E - 2 C \cdot D}{4 A \cdot C - B^2} \\ y_c = \frac{D \cdot B - 2 A \cdot E}{4 A \cdot C - B^2} \end{cases}$$

Vogliamo verificare tale risultato applicando le trasformazioni e precisamente quella più generale: cioè l'affinità che trasforma ellissi in ellissi ed iperboli in iperboli:

Le equazioni canoniche dell'ellisse e dell'iperbole sono date da $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, applicando la trasformazione affine:

$$\mathcal{A} = \begin{cases} x' = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{p} \\ y' = \bar{c}x + \bar{d}y + \bar{q} \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta = \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\Delta}[\bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q})] \\ y \rightarrow \frac{1}{\Delta}[-\bar{c}x + \bar{a}y + (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \end{array} \right.$$

Δ è detto *rapporto di affinità*

L'equazione canonica si trasforma in

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{con } A &= (\pm a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2) \quad ; \quad B = -2(b^2 \bar{d}\bar{b} \pm a^2 \bar{a}\bar{c}) \quad ; \\ C &= (\pm a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2) \quad ; \quad D = -2[b^2 \bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \quad ; \\ E &= 2[b^2 \bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] \quad ; \quad F = -a^2 b^2 (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 \end{aligned}$$

Il centro sia dell'ellisse che dell'iperbole relativamente all'equazione canonica è $O(0; 0)$, applicando la trasformazione affine per i punti: il trasformato di O è $C(\bar{p}; \bar{q})$.

Se nelle coordinate $x = \frac{B \cdot E - 2 \cdot C \cdot D}{4 \cdot A \cdot C - B^2}$ e $y = \frac{D \cdot B - 2 \cdot A \cdot E}{4 \cdot A \cdot C - B^2}$ andiamo a sostituire alle lettere i valori della trasformazione si ha

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{-2(b^2 \bar{d}\bar{b} \pm a^2 \bar{a}\bar{c}) \cdot 2[b^2 \bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] - 2(\pm a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2) \cdot (-2[b^2 \bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})])}{4(\pm a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2) \cdot (\pm a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2) - (-2(b^2 \bar{d}\bar{b} \pm a^2 \bar{a}\bar{c}))^2} = \\ &= \frac{-4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \bar{p} + 4b^4 \bar{b}^3 \bar{d}\bar{q} + 4b^2 a^2 \bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{p} + 4b^2 a^2 \bar{a}^2 \bar{b}\bar{d}\bar{q} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}^2 \bar{c}\bar{q} + 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p} + 4a^4 \bar{a}^3 \bar{c}\bar{q}}{4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 + 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 - 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \mp 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} - 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2} + \\ &+ \frac{\pm 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 \bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{b}\bar{d}\bar{q} + 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p} - 4a^4 \bar{a}^3 \bar{c}\bar{q} + 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \bar{p} - 4b^4 \bar{b}^3 \bar{d}\bar{q} + 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}^2 \bar{c}\bar{q}}{4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 + 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 - 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \mp 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} - 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2} = \\ &= \frac{\pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \bar{p} + 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 \bar{p}}{\pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 + 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2} = \frac{4a^2 b^2 \bar{p}(\bar{b}^2 \bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}^2 \bar{d}^2)}{4a^2 b^2 (\bar{b}^2 \bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}^2 \bar{d}^2)} = \bar{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{-2(b^2 \bar{d}\bar{b} \pm a^2 \bar{a}\bar{c}) \cdot \{-2[b^2 \bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]\} - 2(\pm a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2) \cdot 2[b^2 \bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})]}{4(\pm a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2) \cdot (\pm a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2) - (-2(b^2 \bar{d}\bar{b} \pm a^2 \bar{a}\bar{c}))^2} = \\ &= \frac{4b^4 \bar{d}^3 \bar{b}\bar{p} - 4b^4 \bar{d}^2 \bar{b}^2 \bar{q} + 4a^2 b^2 \bar{b}\bar{c}^2 \bar{d}\bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{q} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{c}\bar{d}^2 \bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{q} + 4a^4 \bar{a}\bar{c}^3 \bar{p} - 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{q}}{4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 + 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 - 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \mp 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} - 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2} + \\ &+ \frac{\mp 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{c}^2 \bar{b}^2 \bar{q} + 4a^4 \bar{c}^3 \bar{a}\bar{p} + 4a^4 \bar{c}^2 \bar{a}^2 \bar{q} - 4b^4 \bar{d}^3 \bar{b}\bar{p} + 4b^4 \bar{d}^2 \bar{b}^2 \bar{q} + 4a^2 b^2 \bar{a}\bar{c}\bar{d}^2 \bar{p} + 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 \bar{q}}{4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \pm 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 + 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 - 4b^4 \bar{b}^2 \bar{d}^2 \mp 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} - 4a^4 \bar{a}^2 \bar{c}^2} = \\ &= \frac{\pm 4a^2 b^2 \bar{c}^2 \bar{b}^2 \bar{q} + 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{q} + 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 \bar{q}}{\pm 4a^2 b^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 + 8a^2 b^2 \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + 4a^2 b^2 \bar{a}^2 \bar{d}^2} = \frac{4a^2 b^2 \bar{q}(\bar{b}^2 \bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}^2 \bar{d}^2)}{4a^2 b^2 (\bar{b}^2 \bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}^2 \bar{d}^2)} = \bar{q} \end{aligned}$$

Le formule relative alle coordinate del centro, trovate col metodo dei diametri, è verificata dal metodo della trasformazione affine.

Ricerca dell'equazione degli assi

Gli assi dell'ellisse e dell'iperbole sono delle rette ortogonali, pertanto consideriamo due direzioni ortogonali $P_{\infty}(1; m; 0)$ e $P'_{\infty}\left(1; -\frac{1}{m}; 0\right)$ e consideriamo i diametri relativi a detti punti rispetto alla conica generale: tali diametri risultano coniugati ed ortogonali, pertanto verificano la relazione:

$$\frac{B}{2}m^2 + (A - C)m - \frac{B}{2} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottengono due valori di m:

$$m = \frac{(C - A) \pm \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B}$$

Le equazioni dei due assi sono:

$$t_1: y - y_c = \frac{(C - A) - \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B}(x - x_c)$$

$$t_2: y - y_c = \frac{(C - A) + \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B}(x - x_c)$$

infatti gli assi di una conica a centro sono due diametri coniugati ed ortogonali passanti per il centro.

Potevamo trovare direttamente le equazioni degli assi scomponendo in fattori il polinomio

A primo membro ed applicando l'annullamento del prodotto

$$B(x - x_c)^2 - 2(A - C)(x - x_c)(y - y_c) - B(y - y_c)^2 = 0$$

Vogliamo verificare tale risultato applicando le trasformazioni e precisamente quella più generale, che conserva gli angoli: cioè la similitudine che trasforma ellissi in ellissi ed iperboli in iperboli:

L'equazione canonica dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, applicando la trasformazione simile:

$$\Sigma_k = \begin{cases} x' = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{p} \\ y' = \bar{c}x + \bar{d}y + \bar{q} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \Delta \\ \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{c}^2 + \bar{d}^2 \\ \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} = 0 \end{cases} \quad \text{e } k = \sqrt{\Delta}$$

L'equazione canonica si trasforma in

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{con } A &= (\pm a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2) & ; & \quad B = -2(b^2 \bar{d}\bar{b} \pm a^2 \bar{a}\bar{c}) & ; \\ C &= (\pm a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2) & ; & \quad D = -2[b^2 \bar{d}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{c}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] & ; \\ E &= 2[b^2 \bar{b}(\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) \pm a^2 \bar{a}(\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q})] & ; & \quad F = -a^2 b^2 (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 \end{aligned}$$

Gli assi dell'ellisse relativamente all'equazione canonica sono $x = 0$ ed $y = 0$, applicando la trasformazione simile : i trasformati di

$$x = 0 \text{ risulta } \bar{d}x - \bar{b}y - (\bar{d}\bar{p} - \bar{b}\bar{q}) = 0.$$

$$y = 0 \text{ risulta } \bar{c}x - \bar{a}y - (\bar{c}\bar{p} - \bar{a}\bar{q}) = 0$$

da cui per $x = 0$ si ha esplicitando: $y - \bar{q} = \frac{\bar{d}}{b}(x - \bar{p})$

per $y = 0$ si ha esplicitando: $y - \bar{q} = \frac{\bar{c}}{a}(x - \bar{p})$

Vogliamo verificare che

$$\frac{(C - A) - \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B} = \frac{\bar{d}}{\bar{b}}$$

E che

$$\frac{(C - A) + \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B} = \frac{\bar{c}}{\bar{a}}$$

Andiamo sostituire alle lettere i valori, sotto le condizioni della trasformazione simile:

ora le condizioni espresse nelle equazioni della trasformazione simile possono essere così espresse:

$$\bar{d} = \bar{a} \quad \text{e} \quad \bar{c} = -\bar{b}$$

$$\text{pertanto} \quad A = (a^2 \bar{c}^2 + b^2 \bar{d}^2) = (a^2 \bar{b}^2 + b^2 \bar{a}^2)$$

$$B = -2(b^2 \bar{d} \bar{b} + a^2 \bar{a} \bar{c}) = -2(b^2 \bar{a} \bar{b} - a^2 \bar{a} \bar{b}) = -2\bar{a} \bar{b}(b^2 - a^2)$$

$$C = (a^2 \bar{a}^2 + b^2 \bar{b}^2)$$

E quindi

$$\begin{aligned} \frac{(C-A) - \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B} &= \frac{[(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)(a^2 - b^2) - \sqrt{(a^2 - b^2)^2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)^2 + 4\bar{a}^2 \bar{b}^2(a^2 - b^2)^2}]}{2\bar{a} \bar{b}(a^2 - b^2)} = \frac{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) - (\bar{a}^2 + \bar{b}^2)}{2\bar{a} \bar{b}} = -\frac{2\bar{b}^2}{2\bar{a} \bar{b}} = \\ &= -\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{\bar{c}}{\bar{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(C-A) + \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B} &= \frac{[(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)(a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 - b^2)^2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)^2 + 4\bar{a}^2 \bar{b}^2(a^2 - b^2)^2}]}{2\bar{a} \bar{b}(a^2 - b^2)} = \frac{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) + (\bar{a}^2 + \bar{b}^2)}{2\bar{a} \bar{b}} = \frac{2\bar{a}^2}{2\bar{a} \bar{b}} = \\ &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{d}}{\bar{b}} \end{aligned}$$

Il caso dell'iperbole è analogo all'ellisse e pertanto la verifica viene tralasciata al lettore.

Il metodo dei diametri coniugati ed ortogonali coincide col metodo della trasformazione.

L'ortogonalità ci ha imposto di applicare la trasformazione simile

Coordinate dei vertici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y - y_c = \frac{(C - A) \pm \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B}(x - x_c) \end{cases}$$

Per la ricerca dei fuochi e delle direttrici relative ai fuochi si determina

- 1) Si calcola l'eccentricità $e = \frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}}{a}$, dove a è il semiasse principale e b il semiasse secondario
- 2) Un punto generico dell'asse principale o trasverso $F(\alpha; \beta)$
- 3) Si calcola la polare relativa ad F : detta direttrice
- 4) Si determina l'equazione dell'ellisse o dell'iperbole noto il fuoco, la direttrice e l'eccentricità
- 5) Si effettua un'identità polinomiale fra l'equazione data dell'ellisse o della parabola e quella trovata e si calcolano α e β si determinano le coordinate di F e l'equazione della direttrice

a) Limitatamente all'iperbole andiamo alla ricerca degli asintoti.

Per definizione di asintoto si ha la retta tangente all'infinito l'iperbole è pertanto il punto di tangenza è un punto all'infinito: cioè il punto di intersezione dell'iperbole e la retta all'infinito: espressa l'iperbole in coordinate omogenee tale punto è dato dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo:

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 = 0$$

Posto $m = \frac{x_2}{x_1}$ si ha: $Cm^2 + Bm + A = 0$

Da cui $m_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A \cdot C}}{2C}$, che risultano i coefficienti angolari degli asintoti e pertanto, ritornando alle coordinate cartesiane si ha

$$\text{L'equazione degli asintoti: } y - y_c = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A \cdot C}}{2C} (x - x_c)$$

Oppure potevamo trovare direttamente le equazione degli assi scomponendo in fattori il polinomio a primo membro ed applicando l'annullamento del prodotto

$$A(x - x_c)^2 + B(x - x_c)(y - y_c) + C(y - y_c)^2 = 0$$

- Parabola

In una parabola si chiamano diametri tutte le semirette parallele all'asse di origine un punto della parabola e concorde con l'asse, si dimostra che i punti medi delle corde di direzione assegnata appartengono al diametro la cui direzione è coniugata alla direzione delle corde; inoltre la retta passante per il punto origine dei diametri avente la direzione delle corde è la retta tangente alla parabola in quel punto. L'asse è il diametro relativo alla direzione ortogonale alla direzione del punto improprio della parabola

L'equazione generale della parabola in coordinate omogenee è

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0$$

con $B^2 - 4AC = 0$

Come l'iperbole la parabola è aperta al finito, questo determina che la parabola interseca la retta impropria in un punto che è dato dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $m = \frac{x_2}{x_1}$ si ha: $Cm^2 + Bm + A = 0$ da cui $m = -\frac{B}{2C}$, pertanto il punto improprio

della parabola è $P_\infty \left(1; -\frac{B}{2C}; 0\right)$. Sia $P'_\infty \left(1; \frac{2C}{B}; 0\right)$ il coniugato ortogonale di P, la retta polare di P'_∞ costituisce l'asse della parabola:

$$Ax_1 + \frac{B}{2} \left(x_2 - \frac{B}{2C}x_1\right) - C \frac{B}{2C}x_2 + \frac{D}{2}(x_3 + 0x_1) + \frac{E}{2} \left(-\frac{B}{2C}x_3 + 0x_2\right) + F0x_3 = 0$$

Da cui operando e riducendo a coordinate cartesiane si ha l'equazione dell'asse

$$2B(A + C)x + (B^2 + 4C^2)y + BD + 2CE = 0$$

Le coordinate del vertice sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ 2B(A + C)x + (B^2 + 4C^2)y + BD + 2CE = 0 \end{cases}$$

Per determinare le coordinate del fuoco della parabola e l'equazione della direttrice, si determina

- 1) Un punto generico dell'asse $F(\alpha; \beta)$: in coordinate parametriche è, posto $\alpha = t$, allora $\beta = g(t)$, dove $g(x) = 0$ è l'equazione dell'asse, $F(t; g(t))$.
- 2) Si calcola la polare relativa ad F : detta direttrice
- 3) Si determina l'equazione della parabola noto il fuoco e la direttrice
- 4) Si effettua un'identità polinomiale fra l'equazione data della parabola e quella trovata per definizione si determinano le coordinate di F e l'equazione della direttrice

3 Posizione reciproca di una retta o di un punto rispetto ad una conica:

Da un punto di vista della geometria elementare data una retta ed una conica appartenenti allo stesso piano, la retta può essere secante se ha in comune con la conica due punti distinti, tangente se ha in comune un solo punto od esterna se non ha alcun punto in comune; da un punto di vista analitico, note le equazioni della retta e della conica, le posizioni di una retta rispetto ad una conica sono determinate dalle soluzioni del sistema costituito dall'equazione della conica e dall'equazione della retta. Poiché tale sistema algebricamente è di secondo grado in due incognite, esso ammette due coppie di soluzioni: ogni coppia individua un punto del piano

-) Se le due soluzioni sono reali e distinte, la retta è secante la conica
-) Se le due soluzioni sono reali e coincidenti, la retta è tangente
-) Se le due soluzioni non sono reali, la retta è esterna.

Il problema relativo alla posizione di una retta rispetto ad una conica analiticamente consiste nel risolvere il sistema

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Se il determinante del sistema Δ è maggiore di 0, allora la retta è secante

Se il determinante del sistema Δ è uguale a 0, allora la retta è tangente

Se il determinante del sistema Δ è minore di 0, allora la retta è esterna.

Particolare attenzione viene riservata dai matematici alla retta tangente in quanto trova numerose applicazioni e dà molte informazioni sull'andamento delle curve nel punto di tangenza.

Retta tangente ad una conica.

Una retta si dice tangente ad una curva in un suo punto se in tale punto la retta e la curva hanno un contatto doppio: cioè, data una curva ed un suo punto P , la tangente alla curva in P è la posizione limite, se esiste, della retta secante, passante per P e per un altro punto Q della curva, al tendere di Q a P .

Alla luce di quanto detto sopra possiamo affermare il seguente teorema:

“ Condizione necessaria e sufficiente perché una retta di equazione $y - y_p = m(x - x_p)$, passante per il punto $P(x_p; y_p)$, sia tangente ad una conica Γ di equazione

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $P \in \Gamma$ e che il discriminante dell'equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y - y_p = m(x - x_p) \end{cases}$$

Sia uguale a zero."

Operativamente andare alla ricerca della retta tangente significa trovare l'equazione risolvente il sistema, essendo il sistema di secondo grado anche l'equazione risolvente è di secondo grado; successivamente si determina il discriminante di detta equazione e lo si pone uguale a zero: tale discriminante è a sua volta una equazione nella variabile m , cioè $\Delta = g(m) \equiv \alpha m^2 + \beta m + \gamma = 0$

dovendo le due soluzioni di $g(m)$ coincidere $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ e quindi $m_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Questo garantisce che la retta $y - y_p = -\frac{\beta}{2\alpha}(x - x_p)$ ha un contatto doppio con la conica.

Vogliamo ora determinare il valore di m in funzione dei coefficienti della conica e delle coordinate del punto P e quindi trovare una formula che ci permette di determinare immediatamente l'equazione della tangente.

Sia data l'equazione generale della conica: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e sia $P(x_p; y_p)$ un suo punto; applicando il teorema di appartenenza di un punto ad una curva, si ha

$$Ax_p^2 + Bx_p y_p + Cy_p^2 + Dx_p + Ey_p + F = 0$$

Si sottragga dall'equazione generale della conica il valore testé trovato:

$$A(x^2 - x_p^2) + B(xy - x_p y_p) + C(y^2 - y_p^2) + D(x - x_p) + E(y - y_p) = 0$$

Si aggiunga e sottragga una stessa quantità in $(xy - x_p y_p)$ e si ottiene:

$$A(x^2 - x_p^2) + B(xy + x y_p - x y_p - x_p y_p) + C(y^2 - y_p^2) + D(x - x_p) + E(y - y_p) = 0$$

Si scompongano in fattori i monomi di coefficienti A, B, C :

$$A(x + x_p)(x - x_p) + B[x(y - y_p) + y_p(x - x_p)] + C(y + y_p)(y - y_p) + D(x - x_p) + E(y - y_p) = 0$$

Si consideri il fascio di rette passante per P : $y - y_p = m(x - x_p)$, e si va a sostituire nella precedente fattorizzazione al fattore $y - y_p$ il fattore $m(x - x_p)$ e si ottiene:

$$A(x + x_p)(x - x_p) + B[mx(x - x_p) + y_p(x - x_p)] + Cm(x - x_p)(y + y_p) + D(x - x_p) + Em(x - x_p) = 0$$

Si semplifichi per $x - x_p$ l'equazione testé trovata e si ottiene

$$A(x + x_p) + B[mx + y_p] + Cm(y + y_p) + D + Em = 0$$

Si imponga il passaggio per P :

$$A(x_p + x_p) + B[mx_p + y_p] + Cm(y_p + y_p) + D + Em = 0$$

Si somma e si ottiene

$$2Ax_p + mBx_p + By_p + 2mCy_p + D + mE = 0$$

Si ricavi il valore di m :

$$m = -\frac{2Ax_p + By_p + D}{Bx_p + 2Cy_p + E}$$

Pertanto l'equazione della retta tangente in P è;

$$y - y_p = -\frac{2Ax_p + By_p + D}{Bx_p + 2Cy_p + E}(x - x_p)$$

Facendo il minimo comune multiplo e portando tutto a primo membro, si ha

$$(Bx_p + 2Cy_p + E)(y - y_p) + (2Ax_p + By_p + D)(x - x_p) = 0$$

Moltiplicando ed ordinando, si ha

$$2Ax x_p + B(x_p y + y_p x) + 2Cyy_p + D(x - x_p) + E(y - y_p) - 2Bx_p y_p - 2Ax_p^2 - 2Cy_p^2 = 0$$

Dividendo per 2, si ha

$$Ax x_p + \frac{B}{2}(x_p y + y_p x) + Cyy_p + \frac{D}{2}(x - x_p) + \frac{E}{2}(y - y_p) - (Bx_p y_p + Ax_p^2 + Cy_p^2) = 0$$

Considerato che, imponendo il passaggio della conica per P, si ha

$$Ax_p^2 + Bx_p y_p + Cy_p^2 + Dx_p + Ey_p + F = 0$$

Da cui

$$Ax_p^2 + Bx_p y_p + Cy_p^2 = -(Dx_p + Ey_p + F)$$

Sostituendo

$$Ax x_p + \frac{B}{2}(x_p y + y_p x) + Cyy_p + \frac{D}{2}(x - x_p) + \frac{E}{2}(y - y_p) + (Dx_p + Ey_p + F) = 0$$

Sommando i monomi con coefficienti omonimi si ha

$$Ax x_p + \frac{B}{2}(x_p y + y_p x) + Cyy_p + \frac{D}{2}(x + x_p) + \frac{E}{2}(y + y_p) + F = 0$$

Che risulta l'equazione della retta tangente in P. Tale formula è detta dello *sdoppiamento*. Pertanto note l'equazione della conica e le coordinate del punto di tangenza, basti sostituire nell'ultima equazione trovata i coefficienti della conica e le coordinate del punto per determinare direttamente l'equazione della retta tangente alla conica nel punto considerato.

Se consideriamo ora le coordinate omogenee del punto P (x_1^p ; x_2^p ; x_3^p) ed andiamo a determinare la retta polare rispetto alla conica espressa in coordinate omogenee di P si ha

$$Ax_1 x_1^p + \frac{B}{2}(x_1^p x_2 + x_2^p x_1) + Cx_2 x_2^p + \frac{D}{2}(x_1 x_3^p + x_1^p x_3) + \frac{E}{2}(x_2 x_3^p + x_3 x_2^p) + Fx_3 x_3^p = 0$$

Posto $x_3^p = x_3 = 1$ in quanto il punto P è un punto proprio e considerato la relazione che lega le coordinate omogenee a quelle cartesiane

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad \text{e} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

L'equazione della polare coincide con l'equazione della tangente nella forma dello *sdoppiamento*:

$$Ax x_p + \frac{B}{2}(x_p y + y_p x) + Cyy_p + \frac{D}{2}(x + x_p) + \frac{E}{2}(y + y_p) + F = 0$$

Posizione di un punto rispetto ad una conica:

Dato un punto ed una conica appartenenti allo stesso piano,

-) il punto è interno alla conica, se la retta polare di detto punto rispetto alla conica è esterna alla conica

-) il punto è sulla conica, se la retta polare di detto punto rispetto alla conica è tangente alla conica

-) il punto è esterno alla conica, se la retta polare di detto punto rispetto alla conica è secante la conica

Se il punto è esterno da esso si possono tracciare due rette tangenti alla conica ed i punti di tangenza coincidono coi punti di intersezione della conica con la polare di detto punto rispetto alla conica stessa.

Se il punto è sulla conica, la retta tangente alla conica per quel punto coincide con la retta polare del punto

Se il punto è interno non è possibile tracciare rette reali tangenti alla conica condotte per quel punto pertanto il problema della posizione di un punto rispetto alla conica si riconduce al problema della posizione di una retta rispetto ad una conica.

Tuttavia esiste una strategia diretta che permette di stabilire se un punto è interno, sulla o esterno ad una ellisse o ad una parabola, generalizzando il concetto di potenza di un punto rispetto ad una circonferenza: concetto presente in geometria elementare come applicazione del teorema della secante e della tangente:

“Se da un punto P , esterno ad una circonferenza, conduciamo una qualunque secante ed indichiamo con A e B i punti in cui taglia la circonferenza, diremo potenza del punto P rispetto alla circonferenza data il prodotto costante $pot (P) = PA \cdot PB$ e tale prodotto è costante per il teorema della tangente e della secante

$pot (P) = PA \cdot PB = PT^2$, dove PT è la tangente condotta da P alla circonferenza e $PT^2 = PO^2 - OT^2$, dove PO è la distanza del punto P dal centro O della circonferenza ed OT è il raggio della circonferenza. Se la circonferenza è riferita ad un sistema di coordinate cartesiane, la sua equazione è

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ e } P (x_p ; y_p); \text{ e ,}$$

$$PO^2 = (x_p - \frac{a}{2})^2 + (y_p - \frac{b}{2})^2 \text{ e}$$

$$OT^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c, \text{ andando a sostituire}$$

$$\text{si ha } Pot (P) = x_p^2 + y_p^2 + ax_p + by_p + c$$

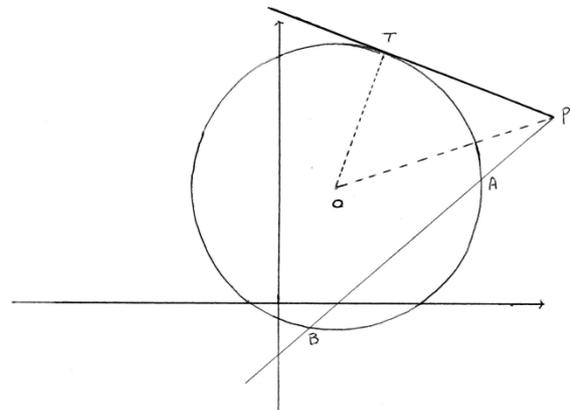


Fig. 1

Cioè, la potenza di un punto rispetto ad una circonferenza si ottiene sostituendo la x e la y dell'equazione della circonferenza con l'ascissa e l'ordinata del punto dato.

La potenza di un punto è positiva, nulla o negativa a seconda che il punto è esterno, sulla o interno alla circonferenza.”

Caso dell'ellisse: “Ogni punto di un'ellisse esterno ad essa ha la somma delle misure delle sue distanze dai fuochi maggiore della misura dell'asse maggiore, invece ogni punto interno ha tale somma minore della misura dell'asse maggiore”

Sia dato un sistema di assi cartesiani e siano $P(x_p ; y_p)$ e $F_1(-c ; 0)$ e $F_2 (c ; 0)$ il punto esterno all'ellisse ed i fuochi dell'ellisse. Siano

$$PF_1 = \sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} \text{ , } PF_2 = \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2}$$

e $2a$. Le distanze di P da F_1 e da F_2 e la misura dell'asse maggiore dell'ellisse.

Sia R il punto di intersezione del segmento PF_1 con l'ellisse. Poiché R è un punto dell'ellisse, vale la relazione $\sqrt{(x_R + c)^2 + y_R^2} + \sqrt{(x_R - c)^2 + y_R^2} = 2a$.

Si consideri il triangolo PRF_2 , per la diseuguaglianza triangolare $PF_2 + PR > RF_2$, se ai membri di questa

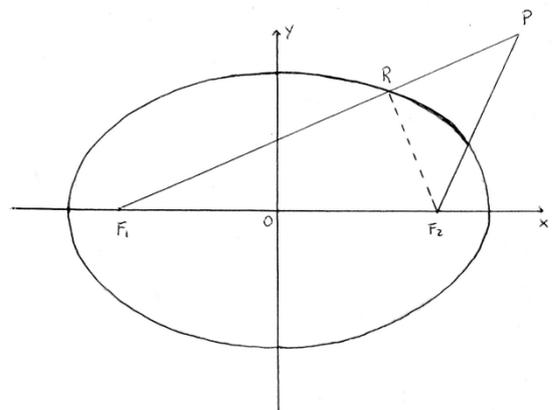


Fig. 2

diseguaglianza sommo la stessa quantità , si ottiene una disequaglianza dello stesso verso: $RF_1 + PF_2 + PR > RF_1 + RF_2$ da cui

$$PF_1 + PF_2 > RF_1 + RF_2 = 2a \text{ e quindi } \sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} + \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} > 2a$$

Analogo ragionamento per il punto interno,

$$\text{solo che } \sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} + \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} < 2a$$

Risolvendo le disequaglianze, si ha

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} - 1 > 0 \text{ e } \frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} - 1 < 0$$

Applicando le trasformazioni e considerando che i punti esterni si conservano esterni ed i punti interni restano interni, e considerato

$$Pot (P) = Ax_p^2 + Bx_p y_p + Cy_p^2 + Dx_p + Ey_p + F$$

pertanto generalizzando possiamo affermare che un punto è esterno, sulla o interno ad un'ellisse se la sua potenza rispetto all'ellisse è positiva, nulla o negativa, senza far ricorso alla strategia che ha permesso di determinare la formula per determinare il numero reale o potenza del punto.

Caso della parabola:

La parabola divide il piano in due regioni una concava ed una convessa. La regione concava è costituita da punti esterni alla parabola, mentre quella convessa è costituita da punti interni: questo deriva dalla definizione di figure convesse in geometria elementare

“ Ogni punto di una parabola esterno ad essa ha la misura della sua distanza dal fuoco maggiore della misura della distanza dalla direttrice, invece ogni punto interno ha tale misura minore della misura della distanza dalla direttrice ”

Sia dato un sistema di assi cartesiani e siano

$P(x_p ; y_p)$, $F(0 ; c)$ e $d \equiv y = -c$ il punto esterno alla parabola, il fuoco e la direttrice della

parabola. Siano $PF_1 = \sqrt{(y_p - c)^2 + x_p^2}$,

$$d(P, d) = |y_p + c|$$

Sia R il punto di intersezione del segmento PF con la parabola. Poiché R è un punto della parabola, vale

$$\text{La relazione } \sqrt{(y_R - c)^2 + x_R^2} = |y_R + c|$$

Siano PK il segmento di perpendicolare condotto da P alla direttrice e RS il segmento di perpendicolare condotto da R al segmento PK, sia RQ il segmento di perpendicolare condotto da R alla direttrice. I segmenti RQ e SK sono segmenti paralleli compresi fra segmenti paralleli e quindi sono congruenti. Considero il triangolo PRS, rettangolo in S.

L'ipotenusa di questo è maggiore di ogni cateto dello stesso e pertanto $RP > PS$. Se a questa disequaglianza sommo quantità congruenti ottengo una disequaglianza dello stesso verso:

$RP + RF > PS + RQ = PS + SK$, da qui sommando si ha $PF > PK$: sostituendo i valori si ha

$$\sqrt{(y_p - c)^2 + x_p^2} > |y_p + c|$$

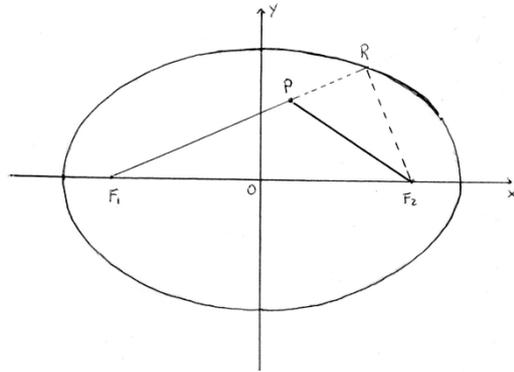


Fig. 3

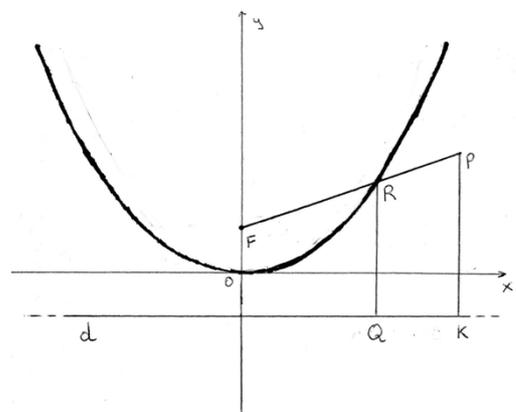


Fig. 4

Analogo ragionamento nel caso il punto è interno, solo che

$$PF < PK: \sqrt{(y_p - c)^2 + x_p^2} < |y_p + c|$$

Risolvendo le disequazioni si ha $ax_p^2 - y_p > 0$ e $ax_p^2 - y_p < 0$

Applicando le trasformazioni e considerando che i punti esterni si conservano esterni ed i punti interni restano interni, e considerato

$$Pot (P) = Ax_p^2 + Bx_p y_p + Cy_p^2 + Dx_p + Ey_p + F$$

pertanto generalizzando possiamo affermare che un punto è esterno, sulla o interno ad una parabola se la sua potenza rispetto alla parabola è positiva, nulla o negativa, senza far ricorso alla strategia che ha permesso di determinare la formula per determinare il numero reale o potenza del punto.

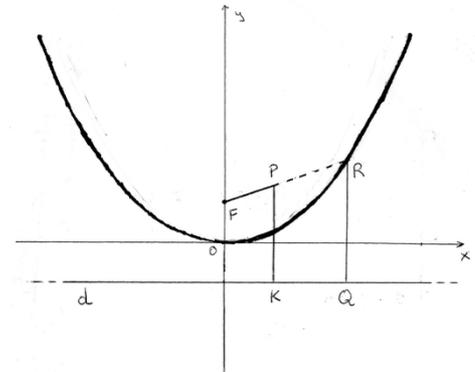


Fig. 5

Caso dell'iperbole:

“ Ogni punto di un'iperbole esterno ad essa ha la differenza delle misure delle sue distanze dai fuochi minore della misura dell'asse trasverso, invece ogni punto interno ha tale differenza maggiore della misura dell'asse trasverso ”

Sia dato un sistema di assi cartesiani e siano il punto $P(x_p ; y_p)$ esterno all'iperbole ed $F_1(-c ; 0)$ e $F_2(c ; 0)$ i fuochi dell'iperbole. Siano

$$PF_1 = \sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} \quad , \quad PF_2 = \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2}$$

le distanze di P da F_1 e da F_2 e $2a$ la misura dell'asse maggiore dell'iperbole. Se $PF_1 > PF_2$ si prenda R il punto di intersezione del segmento PF_2 con l'iperbole. Poiché R è un punto dell'iperbole, vale la relazione

$$\sqrt{(x_R + c)^2 + y_R^2} - \sqrt{(x_R - c)^2 + y_R^2} = 2a .$$

Consideriamo il triangolo PF_1R , per la disequazione triangolare $PF_1 - PR < F_1R$, sottraendo ad ambo i termini una stessa quantità si ottiene una disequazione dello stesso verso: $PF_1 - PR - RF_2 < F_1R - RF_2 = 2a$ da cui

$$PF_1 - (PR + RF_2) = PF_1 - PF_2 < 2a$$

Possiamo quindi scrivere:

$$PF_1 - PF_2 < 2a$$

Che analiticamente possiamo scrivere, riferendo i punti ad un sistema di riferimento cartesiano in analogia con l'ellisse:

$$\sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} - \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} < 2a$$

Risolvendo otteniamo

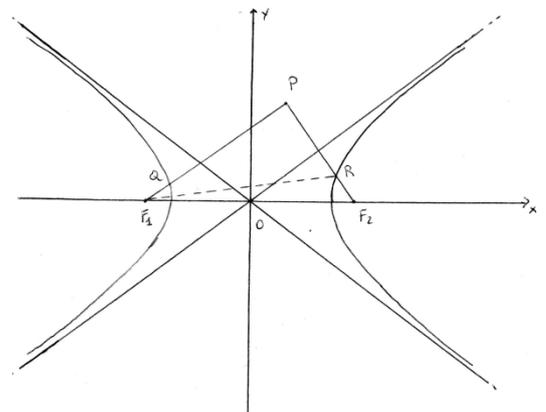


Fig. 6

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Se il punto P è interno, tale differenza è maggiore di $2a$.

Supponiamo che il punto P sia interno all'iperbole contenuta nel semiasse positivo delle ascisse. Qualunque punto di tale zona di iperbole ha l'ascissa maggiore dell'ascissa del vertice in $A(a; 0)$. Consideriamo i triangoli F_1A_1P e A_1F_2P applicando ad essi il teorema "in ogni triangolo ogni lato è maggiore della differenza degli altri due", si hanno le due disequazioni:

$PF_1 > PA_1 - F_1A_1$ e $PF_2 > PA_2 - A_2F_2$, sottraendo i primi membri tra di loro ed i secondi membri tra di loro in disequazioni equeverse si ottiene una disequazione equeversa:

$$PF_1 - PF_2 > PA_1 - F_1A_1 - PA_2 + A_2F_2,$$

poiché $A_2F_2 = A_1F_1$ e a secondo membro sono opposti eliminandoli si ha $PF_1 - PF_2 > PA_1 - PA_2$, che relativamente al triangolo A_1PA_2 la differenza $PA_1 - PA_2 > A_1A_2 = 2a$. Applicando la proprietà transitiva della disequazione possiamo scrivere: $PF_1 - PF_2 > PA_1 - PA_2 > A_1A_2 = 2a$ e quindi

$$PF_1 - PF_2 > 2a$$

Che analiticamente possiamo scrivere, riferendo i punti ad un sistema di riferimento cartesiano in analogia con l'ellisse:

$$\sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} - \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} > 2a$$

Risolvendo otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$$

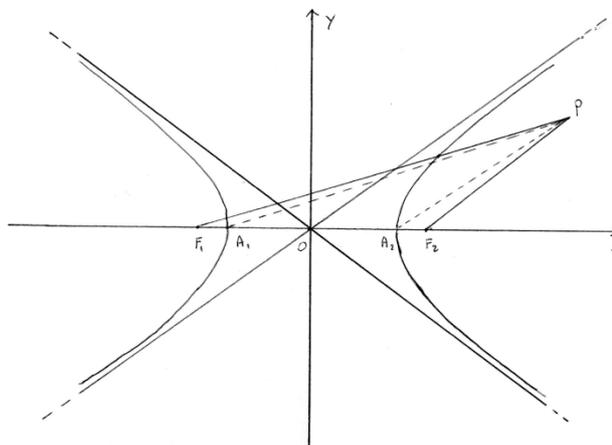


Fig. 7

4 NOZIONI DI ALGEBRA LINEARE: MATRICI

Def. 8) Sia R l'insieme dei numeri reali ed m, n due interi positivi, si dice *matrice* ad m righe ed n colonne costruita su R un insieme di mn elementi di R a ciascuno dei quali sia stata associata una coppia $(i; j)$ di indici con $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ed $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Gli elementi di una matrice si sogliono disporre in un tabella, delimitata da due parentesi quadre o da due parentesi rotonde, ordinando nella stessa riga tutti gli elementi di R che hanno uguale il primo indice (indice di riga), e nella stessa colonna quelli che hanno uguale il secondo indice (indice di colonna)

Pertanto la matrice si denota col seguente simbolo

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{oppure sinteticamente} \quad (a_{i,j})_{\substack{i=1,2,3,\dots,m \\ j=1,2,3,\dots,n}}$$

L'elemento $a_{i,j} \in R$ si dice elemento di posto (i, j) e si trova all'incrocio della i -esima riga con la j -esima colonna. La matrice ha ordine $m \cdot n$

Def. 9) Si dice *matrice nulla* la matrice con tutti i suoi elementi uguali a zero

Def. 10) Si dice che la matrice B è la *matrice trasposta* della matrice A , se è costituita dagli stessi elementi di A ma con le righe e le colonne scambiate.

Def. 11) Due matrici sono uguali se hanno tutti gli elementi dello stesso posto uguali

Def. 12) Due matrici si dicono *matrici conformi* quando il numero delle colonne della prima sono uguali al numero delle righe della seconda

Def. 13) Se $m = n$ allora la matrice si dice *matrice quadrata* di ordine n

Gli elementi $a_{i,j}$ di una matrice quadrata con $i = j$ costituiscono la *diagonale principale* della matrice quadrata.

Def. 14) Si dice *matrice diagonale* quella matrice quadrata con tutti gli elementi uguali a zero fatta eccezione di quelli della diagonale principale.

Def. 15) Si dice *matrice unità o identità* la matrice diagonale con tutti gli elementi della diagonale principale uguali ad 1.

Generalmente la matrice identità si indica con $I = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ con $\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{se } i = j \\ a_{i,j} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Def. 16) Si dice *matrice triangolare* superiore od inferiore rispettivamente la matrice costituita da tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale uguali a zero o costituita da tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale uguali a zero.

Operazioni tra matrici.

Addizione:

L'addizione fra matrici è definita solo per matrici con ugual numero di righe e di colonne

La somma di due matrici è una matrice avente per elementi la somma degli elementi dello stesso posto.

Le proprietà dell'addizione tra matrici dipendono dalle proprietà algebriche dell'insieme a cui appartengono gli elementi della matrice. Nel nostro caso l'insieme è l'insieme dei numeri reali pertanto le matrici rispetto all'addizione costituiscono un gruppo abeliano: siano A, B, C tre matrici elementi di $\mathcal{M}(m,n)$.

- L'insieme delle matrici è un insieme *chiuso*: $A + B = D$, con $D \in \mathcal{M}(m,n)$.
- Vale la proprietà *associativa*: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- L'insieme delle matrici ammette *elemento neutro*: $A + O = O + A = A$, dove O è la *matrice nulla* di $\mathcal{M}(m,n)$.
- Ogni matrice ammette *elemento inverso* (la *matrice opposta*): $A + (-A) = O$
- Vale la proprietà *commutativa*: $A + B = B + A$

- Moltiplicazione di un numero per una matrice:

Moltiplicare un numero o uno scalare per una matrice significa moltiplicare il numero per i singoli elementi della matrice.

Siano r ed s due scalari elementi di \mathcal{R} e A e B due matrici elementi di $\mathcal{M}(m,n)$. La moltiplicazione di uno scalare per una matrice gode delle seguenti proprietà:

- Proprietà distributiva dello scalare rispetto alla somma di matrici: $r(A + B) = rA + rB$
- Proprietà distributiva della matrice rispetto alla somma di scalari $(r + s)A = rA + sA$
- Il prodotto dello zero per una matrice è la matrice nulla: $0 * A = O$, dove O è la matrice nulla di $\mathcal{M}(m,n)$.
- Il prodotto dell'unità degli scalari per una matrice è la matrice stessa: $1 * A = A$
- $r(sA) = (rs)A$

L'insieme delle matrici su \mathcal{R} su cui è stata definita l'addizione ed il prodotto di uno scalare per una matrice con tutte le proprietà costituisce uno spazio vettoriale: pertanto i vettori possono considerarsi come matrici riga o matrici colonna: costituite da una sola riga o da una sola colonna.

- Moltiplicazione riga per colonna:

Il prodotto riga per colonna fra matrici si può effettuare solo per matrici conformi: cioè il numero delle colonne del primo fattore deve essere uguale al numero delle righe del secondo fattore: questo ci permette di affermare che in generale il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.

Date due matrici conformi la matrice prodotto è la matrice ottenuta moltiplicando gli elementi di ogni riga della prima matrice per ogni colonna della seconda matrice e sommando i risultati.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \dots + a_{1,n}b_{n,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + \dots + a_{1,n}b_{n,2} & \dots & a_{1,1}b_{1,p} + a_{1,2}b_{2,p} + \dots + a_{1,n}b_{n,p} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + \dots + a_{2,n}b_{n,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + \dots + a_{2,n}b_{n,2} & \dots & a_{2,1}b_{1,p} + a_{2,2}b_{2,p} + \dots + a_{2,n}b_{n,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}b_{1,1} + a_{m,2}b_{2,1} + \dots + a_{m,n}b_{n,1} & a_{m,1}b_{1,2} + a_{m,2}b_{2,2} + \dots + a_{m,n}b_{n,2} & \dots & a_{m,1}b_{1,p} + a_{m,2}b_{2,p} + \dots + a_{m,n}b_{n,p} \end{pmatrix}$$

NB Il prodotto fra matrici può dare come risultato la matrice nulla pur non essendo alcuna matrice fattore nulla. Questo ci dice che il prodotto fra matrici ammette divisori dello zero.

Teorema 1) : Ogni matrice quadrata A si può rappresentare nella forma $A = P \cdot B$ oppure $A = B \cdot Q$ dove B è una matrice triangolare e P e Q due matrici non nulle con B,P,Q dello stesso ordine di A.

Determinante di una matrice quadrata.

Def. 17) Data una matrice quadrata A, si chiama determinante di A il numero reale associato ad essa mediante il seguente procedimento induttivo:

a) Se la matrice A è del 1° ordine, il determinante di A è l'elemento che costituisce la matrice stessa.

Se $A = (a_{1,1})$, allora $\det A = a_{1,1}$

b) Se la matrice A è del 2° ordine, il determinante è il valore numerico, dato dalla differenza dei prodotti degli elementi delle due diagonali

Se $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}$

Def. 18) Sia data la matrice quadrata A, si dice *minore complementare* dell'elemento $a_{h,k}$ il determinante dalla matrice $A_{h,k}$, ottenuta sopprimendo l' h-esima riga e la k-esima colonna della matrice A.

Def. 19) Si chiama *complemento algebrico* dell'elemento $a_{h,k}$ il minore complementare di $a_{h,k}$, prece-duto dal segno + o - a secondo che $h+k$ sia pari o dispari.

Teorema 2) (di Laplace): La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) qualsiasi di una matrice quadrata A di ordine n per i rispettivi complementi algebrici ha un valore che non dipende dalla riga (o colonna) considerata.

Def. 20) Si chiama *determinante* di una matrice d'ordine n la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

NB. Il determinante di una matrice quadrata A si indica con uno dei simboli:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{vmatrix}$$

Proprietà dei determinanti:

-) Due matrici quadrate l'una trasposta dell'altra hanno determinanti uguali.
-) Il determinante di una matrice quadrata con tutti gli elementi di una riga o di una colonna nulla è uguale a zero.
-) Scambiando fra loro due righe o due colonne , il determinante cambia di segno.
-) Se due righe o due colonne di una matrice quadrata sono proporzionali, il determinante della matrice è uguale a zero.
-) Se si moltiplica una riga o una colonna di una matrice quadrata per un numero k , il determinante della matrice resta moltiplicato per k .
-) Se ad una riga (o ad una colonna) si aggiunge un'altra riga (o un'altra colonna) moltiplicata per un fattore k , il determinante della matrice non cambia
-) (Teorema di Laplace) In una matrice quadrata, la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i complementi algebrici di una riga (o di una colonna) parallela è uguale a zero.
-) Il determinante di una matrice quadrata diagonale o triangolare è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.
-) (Proprietà di Binet) Il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici fattori.

Def. 21) Si dice *matrice inversa* di una matrice quadrata A di ordine n (se esiste) la matrice A^{-1} dello stesso ordine di A tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{|A|} & \frac{A_{1,2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{1,n}}{|A|} \\ \frac{A_{2,1}}{|A|} & \frac{A_{2,2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{2,n}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n,1}}{|A|} & \frac{A_{n,2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix} \quad \text{dove } |A| = \det A \quad \text{e } A_{i,j} \text{ è il complemento algebrico di } a_{i,j}$$

Def. 22) Una matrice si dice *singolare* quando il suo determinante è uguale a zero.

Una matrice si dice *invertibile* se ammette inversa.

Teorema 3): Condizione necessaria e sufficiente perché una matrice quadrata sia invertibile e che il suo determinante sia diverso da zero.

Proprietà: Si dimostra che $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Def. 23) Si dice *matrice ortogonale* la matrice quadrata che è uguale all'inversa della sua trasposta.

Se A^T è la matrice trasposta e $A = (A^T)^{-1}$, allora A una matrice ortogonale: oppure $A^{-1} = A^T$: cioè la matrice inversa di A coincide con la trasposta della matrice quadrata A stessa

Proprietà: Il determinante di una matrice ortogonale vale ± 1

NB. La matrice ortogonale è detta ortogonale perché interviene nelle trasformazioni geometriche quando si vogliono mutare gli assi cartesiani ortogonali in altri assi ortogonali mantenendo fissa l'origine: infatti le trasformazioni isometriche di rotazione ammettono come matrice caratteristica una matrice ortogonale. Questo induce ad affermare che una matrice ortogonale nelle trasformazioni geometriche è un operatore rotazionale.

Def. 24) Si dice che la matrice A è simile alla matrice B dello stesso ordine di A se esiste una matrice non singolare H tale che

$$B = H^{-1} \cdot A \cdot H$$

NB) Questa relazione ci permette di affermare che la matrice A è stata trasformata nella matrice B tramite la matrice H. Se A e B sono simili allora A e B corrispondono alla stessa applicazione lineare scritta con basi diverse.

Teorema 4) (Teorema spettrale per matrici simmetriche):

- Sia A una matrice simmetrica, allora A è diagonalizzabile: cioè esistono una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1} A P$
- Sia A una matrice simmetrica, è sempre possibile determinare una matrice ortogonale Q tale che $D = Q^{-1} A Q = Q^T A Q$: cioè A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale
-

Osservazione: La matrice D e la matrice A sono simili e le matrici P e Q sono le matrici di trasformazione.

Teorema 5) : Due matrici A e B dello stesso ordine sono simili se e solo se le loro matrici caratteristiche: $A - \lambda I$ e $B - \lambda I$, sono equivalenti: cioè hanno gli stessi fattori invarianti.

Definizione: il determinante della matrice caratteristica è detto *polinomio caratteristico* associato alla matrice. Le soluzioni del polinomio caratteristico sono detti autovalori associati alla matrice, mentre il nucleo dell'equazione matriciale $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$, detto $\text{kern}(A - \lambda I) = \text{Span}\{\vec{v}\}$ è costituito da vettori non nulli, detti autovettori associati alla matrice A. La matrice P e la matrice Q

sono matrici costituite da autovettori di A , nel caso di Q gli autovettori sono ortogonali: cioè il loro prodotto scalare è nullo.

NB La relazione di similitudine nell'insieme delle matrici quadrate gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; pertanto è una relazione di equivalenza e ripartisce le matrici in classi di equivalenza.

Rango di una matrice A :

Def. 25) Si chiama rango di una matrice l'ordine massimo tra tutte le sottomatrici di A con determinante diverso da zero.

Il rango di una matrice gioca un ruolo fondamentale nel Teorema di Rouché-Capelli per la risoluzione di sistemi lineari.

Si verifica che il rango di una matrice è uguale al numero degli autovalori non nulli.

La traccia di una matrice è uguale alla somma dei suoi autovalori ed è data pure dalla somma dei valori degli elementi della diagonale principale.

Il determinante di una matrice è uguale al prodotto dei suoi autovalori.

Per le matrici simmetriche valgono le seguenti proprietà:

-) i suoi autovalori sono tutti reali
-) gli autovettori corrispondenti agli autovalori distinti sono ortogonali
-) la matrice ortogonale degli autovettori diagonalizza la matrice di partenza.

Diagonalizzazione di una matrice quadrata:

Def. 26) Data una matrice $A \in M_n$, se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A , si dice autospazio di A relativo λ e si indica con il simbolo V_λ , l'insieme dei vettori così definito:

$$V_\lambda = \{X \in M_{n,1} \mid AX = \lambda X\}$$

Proprietà: Sia $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A e V_λ il relativo autospazio allora V_λ è un sottospazio di $M_{n,1}$.

Def. 27) Si dice molteplicità algebrica di λ la dimensione di esso come radice dell'equazione caratteristica .

Si dice molteplicità geometrica di λ la dimensione del relativo autospazio: $\dim V_\lambda$.

- Proprietà: 1) $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$
 2) $n = m_g(\lambda) + \text{rang}(A - \lambda I)$

Teorema 6): Una matrice $A \in M_n$ è diagonalizzabile se e solo se sono verificate :

-) la sua equazione caratteristica ha tutte le radici reali
-) per ogni autovalore la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica:

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda).$$

Teorema 7) : Una matrice $A \in M_n$ è diagonalizzabile se e solo se esistono n autovettori linearmente indipendenti: cioè la matrice d'ordine n costituita da colonne formate dagli autovettori di A ha determinante diverso da zero.

Corollario: Sia T una trasformazione lineare e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ autovettori di T relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rispettivamente. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono tutti distinti tra loro allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sono linearmente indipendenti e.

Da questo corollario discende che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ costituisce una base di \mathbf{R}^n . Lo stesso corollario ci permette di avere una strategia per vedere se una matrice è diagonalizzabile e contemporaneamente di trovare una base

-) Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Se sono tutte distinte, allora abbiamo n autovalori distinti corrispondenti ad n autovettori linearmente indipendenti e quindi A è diagonalizzabile

-) Per ciascun autovalore λ calcoliamo il $\ker((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}))$. Se la somma delle dimensioni di

$$\ker(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) + \ker(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) + \dots + \ker(\mathbf{A} - \lambda_t \mathbf{I}) = n$$

allora ciò permetterà di trovare n autovettori linearmente indipendenti e quindi una base B .

Teorema 8) : Se una matrice $A \in M_n$ è diagonalizzabile, allora gli elementi diversi da zero della matrice diagonale D , simile ad A , sono gli autovalori di A .

Teorema 9) (Teorema spettrale per matrici simmetriche) :

Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ una matrice simmetrica, allora esiste una base \mathbf{R}^n ortonormale di autovettori di A

Una matrice si dice ortonormalizzata se e solo se è costituita da vettori ortogonali e normali, pertanto per ortonormalizzare una matrice basta ortonormalizzare i vettori di cui è costituita.

Metodo per ortonormalizzare una base:

Sia $B = \{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$ una base di \mathbf{R}^3 , vogliamo ortonormalizzare tale base:

1) Rendiamo i vettori tra loro ortogonali:

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\| \cdot \|\vec{b}_1\|} \cdot \vec{b}_1$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\| \cdot \|\vec{b}_1\|} \cdot \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\| \cdot \|\vec{b}_2\|} \cdot \vec{b}_2$$

2) La nuova base $B' = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ è costituita da vettori ortogonali, per normalizzarli si divide ogni vettore per il proprio modulo:

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} \quad ; \quad \vec{c}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} \quad ; \quad \vec{c}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|}$$

La nuova base $B'' = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2; \vec{c}_3\}$ è costituita da vettori ortonormalizzati.

Esercizio guida:

Data la matrice quadrata d'ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

determinare autovalori ed autovettori della matrice A , stabilire se essa è diagonalizzabile trovando la matrice H di trasformazione e la matrice diagonale D . Verificare infine che orto normalizzando H non è possibile trovare con la nuova matrice una matrice diagonale simile ad A , bensì si trova una matrice simile triangolare.

Risoluzione

Determiniamo il polinomio caratteristico di A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-12) = -10 - 3\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

L'equazione associata a tale polinomio è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Tale equazione ammette le due soluzioni: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, che costituiscono gli autovalori della matrice A : infatti $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2$ che sono la traccia di A (somma degli elementi della diagonale principale) e il determinante della matrice A .

Per determinare gli autovettori relativi a detti autovalori bisogna trovare i vettori del nucleo: cioè risolvere l'equazione matriciale relativa al singolo autovalore

$$\text{a) per } \lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_1 = \text{kern}(A - \lambda_1 I) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } t \in \mathbb{R} \mid \vec{v}(t) = (t, t)\}$$

Tale sottospazio \mathcal{A}_1 è generato da un qualsiasi suo vettore, in particolare per $t=1$, $\vec{v}_1(1, 1)$, quindi possiamo scrivere:

$$\mathcal{A}_1 = \text{kern}(A - \lambda_1 I) = \text{Span}\{(1, 1)\}$$

Il vettore $\vec{v}_1(1, 1)$ costituisce l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ della matrice A

$$\text{b) per } \lambda_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}t \\ y = t \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_2 = \text{kern}(A - \lambda_2 I) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } t \in \mathbb{R} \mid \vec{v}(t) = (\frac{4}{3}t, t)\}$$

Tale sottospazio \mathcal{A}_2 è generato da un qualsiasi suo vettore, in particolare per $t=1$, $\vec{v}_2(\frac{4}{3}, 1)$, quindi possiamo scrivere:

$$\mathcal{A}_2 = \text{kern}(A - \lambda_2 I) = \text{Span}\{(\frac{4}{3}, 1)\}$$

Il vettore $\vec{v}_2 \left(\frac{4}{3}, 1 \right)$ costituisce l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ della matrice A.

Una matrice è diagonalizzabile se la dimensione algebrica e geometrica dei suoi auto vettori sono uguali. L'equazione associata al polinomio caratteristico è decomponibile in fattori di primo grado: $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, pertanto gli autovettori ammettono dimensione algebrica 1; gli autospazi sono generati ognuno da un singolo vettore, pertanto la dimensione geometrica degli autovettori è 1. Poiché dimensione algebrica e dimensione geometrica sono uguali, la matrice A è diagonalizzabile.

Per diagonalizzare la matrice A dobbiamo trovare una matrice diagonale D simile ad A e pertanto dobbiamo individuare una matrice di trasformazione H tale che

$$D = H^{-1} A H$$

Proviamo a verificare che i vettori $\vec{v}_1(1, 1)$ e $\vec{v}_2 \left(\frac{4}{3}, 1 \right)$ sono indipendenti. Per essere indipendenti il determinante della matrice che ammette tali vettori come sue colonne è diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0$$

I due vettori sono indipendenti. Sia $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tale matrice, formata dagli autovettori, e

calcoliamo la matrice inversa: $H^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice D simile ad A è costituita dagli autovalori di A.

NB 1). Se consideriamo la matrice A costituita dai vettori $\omega_1(5, 3)$ e $\omega_2(-4, -2)$ e consideriamo la matrice H, essendo costituita da vettori indipendenti, come una base del piano \mathbb{R}^2 , allora i vettori ω_1 e ω_2 sono dati come combinazione lineare dei vettori generatori degli autoaspetti di A: infatti

$$(5; 3) = -3(1; 1) + 6\left(\frac{4}{3}; 1\right) = (-3+8; -3+6) = (5; 3)$$

$$(-4; -2) = 4(1; 1) - 6\left(\frac{4}{3}; 1\right) = (4-8; 4-6) = (-4; -2)$$

Dove i fattori sono le colonne della matrice prodotto $H^{-1} A$.

Andiamo ad ortonormalizzare la base H e determiniamo con questa nuova base la matrice T simile ad A, ci accorgiamo che tale matrice non è diagonale, non essendo A simmetrica: infatti ortonormalizziamo H

$$\vec{b}_1 = \vec{v}_1 = (1; 1)$$

$$\vec{c}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} \vec{b}_1 = \left(\frac{4}{3}; 1 \right) - \frac{7}{2} (1; 1) = \left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{6} \right)$$

$$\vec{c}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

La matrice H ortonormalizzata risulta $H_{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la sua inversa è $H_{\perp}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$T = H_{\perp}^{-1} A H_{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & -\frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice T simile ad A risulta una matrice triangolare superiore .

Esercizio 2

Data la matrice quadrata d'ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

determinare autovalori ed autovettori della matrice A , stabilire se essa è diagonalizzabile travando la matrice H di trasformazione, dopo averla ortonormalizzata e la matrice diagonale D.

Risoluzione

Determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 2 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 - \lambda \end{matrix} \right| = -2\lambda + \lambda^2 - 3 = \\ = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

L'equazione associata a tale polinomio è

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Tale equazione ammette le due soluzioni: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$, che costituiscono gli autovalori della matrice A: infatti $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3$ che sono la traccia di A (somma degli elementi della diagonale principale) e il determinante della matrice A.

Per determinare gli autovettori relativi a detti autovalori bisogna trovare i vettori del nucleo: cioè risolvere l'equazione matriciale relativa al singolo auto valore

$$a) \quad \text{per } \lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x + 1y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{3}t \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_1 = \text{kern}(A - \lambda_1 I) = \{ \vec{v} \in R^2 \text{ et } t \in R \mid \vec{v}(t) = (t, -\sqrt{3}t) \}$$

Tale sottospazio \mathcal{A}_1 è generato da un qualsiasi suo vettore, in particolare per $t=1$, $\vec{v}_1(1, -\sqrt{3})$, quindi possiamo scrivere:

$$\mathcal{A}_1 = \text{kern}(A - \lambda_1 I) = \text{Span}\{(1, -\sqrt{3})\}$$

Il vettore $\vec{v}_1(1, -\sqrt{3})$ costituisce l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ della matrice A

$$b) \quad \text{per } \lambda_2 = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_2 = \text{kern}(A - \lambda_2 I) = \{ \vec{v} \in R^2 \text{ et } t \in R \mid \vec{v}(t) = (\sqrt{3}t, t) \}$$

Tale sottospazio \mathcal{A}_2 è generato da un qualsiasi suo vettore, in particolare per $t=1$, $\vec{v}_2(\sqrt{3}, 1)$, quindi possiamo scrivere:

$$\mathcal{A}_2 = \text{kern}(A - \lambda_2 I) = \text{Span}\{(\sqrt{3}, 1)\}$$

Il vettore $\vec{v}_2(\sqrt{3}, 1)$ costituisce l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ della matrice A.

La matrice A è una matrice simmetrica per il teorema spettrale tale matrice è diagonalizzabile tramite una matrice H di trasformazione ortonormalizzata. Poiché i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 sono indipendenti ed ortogonali: infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1; -\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}; 1) = 0,$$

andiamo a normalizzarli: cioè dividiamo le componenti per il modulo dei vettori.

$$\vec{v}'_1 = \frac{1}{2}(1; -\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad \vec{v}'_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}; 1).$$

Sia H tale matrice, formata dagli auto vettori ortonormalizzati,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{la sua matrice inversa}$$

Calcoliamo la matrice diagonale: $D = H^{-1} A H$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice D simile ad A è costituita dagli autovalori di A.

5 Applicazione delle Matrici alle Coniche

L'uso delle matrici ci permetterà di semplificare il calcolo e di memorizzare percorsi operativi per determinare caratteristiche pecuniarie e fondamentali delle coniche ma soprattutto di ridurre a forma canonica le coniche generali sfruttando il metodo della diagonalizzazione delle matrici associate all'equazione generale della conica, inoltre lo stesso metodo ci permetterà di individuare la trasformazione lineare rotazionale, senza far uso della goniometria, per trovare la forma canonica.

Data l'equazione generale della conica:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si considerino le tre matrici ad essa associate:

$$J_3 = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \quad ; \quad J_2 = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \quad ; \quad J_1 = (A + C)$$

La prima è detta *matrice associata del terzo ordine*, la seconda *matrice associata del secondo ordine* e la terza *matrice associata del primo ordine*: in quanto la prima è una matrice quadrata d'ordine 3, essendo costituita da tre righe e tre colonne, la seconda è una matrice quadrata del secondo ordine, essendo costituita da due righe e due colonne, mentre la terza è una matrice quadrata del primo ordine, il cui unico elemento è la somma di due coefficienti della conica.

Tali matrici sono dette *invarianti ortogonali della conica* in quanto hanno proprietà indipendenti dalla scelta del riferimento cartesiano ortogonale: cioè la conica comunque sia soggetta a trasfor-

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \text{Det}(J'_3) &= \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma \quad ; \quad \det(J'_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta \quad ; \\
 & \qquad \qquad \qquad \det(J'_1) = \det(\alpha + \beta) = \alpha + \beta \\
 \text{b) } \text{Det}(J'_3) &= \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = -\alpha\beta\gamma \quad ; \quad \det(J'_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} = -\alpha\beta \quad ; \\
 & \qquad \qquad \qquad \det(J'_1) = \det(\alpha - \beta) = \alpha - \beta \\
 \text{c) } \text{Det}(J'_3) &= \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = -\alpha\beta^2 \quad ; \quad \det(J'_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \det(J'_1) = \\
 & \det(\alpha) = \alpha
 \end{aligned}$$

Ricerca dell'equazione canonica di una conica data in forma generale

1) Metodo: Dopo aver calcolato il determinante di J_3 e J_2 siano $\text{Det}(J_3) = m$ e $\text{Det}(J_2) = n$ e calcolato il valore di $J_1 = p$.

Se $n > 0$ la conica è un'ellisse, allora si risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = m \\ \alpha\beta = n \\ \alpha + \beta = p \end{cases}$$

una volta determinati i valori di α , β e γ , si vanno a sostituire nell'equazione:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$$

Se $n < 0$ la conica è un'iperbole, allora si risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\alpha\beta\gamma = m \\ -\alpha\beta = n \\ \alpha - \beta = p \end{cases}$$

una volta determinati i valori di α , β e γ , si vanno a sostituire nell'equazione:

$$\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma = 0$$

Se $n = 0$ la conica è una parabola, allora si risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\alpha\beta^2 = m \\ \alpha = p \end{cases}$$

NB. Il sistema è di secondo grado. In tale sistema α è univocamente determinato, mentre β figurando a secondo grado in un'equazione di secondo grado pura può essere positivo o negativo.

La scelta per l'una o l'altra alternativa va ricondotta alla concavità della parabola generale:

per la concavità, una volta trovato l'asse ed il vertice, si sceglie un punto dell'asse e lo si sostituisce nell'equazione della parabola generale se il valore risulta negativo e il punto è elemento del semiasse positivo ($V, +\infty$) la concavità risulta rivolta verso il semiasse positivo; se il valore risulta positivo e il punto è elemento del semiasse positivo ($V, +\infty$) la concavità risulta rivolta verso il semiasse negativo. Se il valore risulta negativo e il punto è elemento del semiasse negativo ($-\infty, V$) la concavità risulta rivolta verso il semiasse negativo; se il valore risulta positivo e il punto è elemento del semiasse positivo ($-\infty, V$) la concavità risulta rivolta verso il semiasse positivo.

- a) Se la concavità è rivolta verso il semipiano positivo, β viene scelto positivo
 b) Se la concavità è rivolta verso il semipiano negativo, β viene scelto negativo.

Una volta determinati i valori di α, β , si vanno a sostituire nell'equazione:

d) $\alpha x^2 + 2\beta y = 0$

Ottenendo così le equazioni canoniche.

2) Metodo

Coniche a centro : ellisse e iperbole $J_2 \neq 0$: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$ con α e β autovalori di J_2 , coincidenti con le soluzioni dell'equazione

$$z^2 - \det(J_1)z + \det(J_2) = 0$$

con $\alpha < \beta$ e $\gamma = \frac{J_3}{J_2}$

Conica non a centro : parabola $J_2=0$: $\alpha x^2 + 2\beta y = 0$ con α l'autovalore di J_2 diverso da zero, coincidente con la traccia di J_2 : cioè con $\alpha = J_1$ e $\beta = \pm \sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}$

(- concavità rivolta verso l'alto, + concavità rivolta verso il basso)

Ricerca di punti notevoli e rette notevoli col metodo degli invarianti ortogonali

a) *Coniche a centro: Ellisse ed iperbole*

-) Calcolo delle coordinate del centro:

Considero la seguente equazione matriciale :
$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolvero
$$\begin{cases} Ax + \frac{B}{2}y + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}x + Cy + \frac{E}{2} = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:
$$\begin{cases} Ax + \frac{B}{2}y + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}x + Cy + \frac{E}{2} = 0 \end{cases}$$
 risolvo col metodo di Cramer e trovo le coordinate del

centro:
$$x_c = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad y_c = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$$

-) Calcolo equazione degli assi.

Ricordando che i punti impropri sono direzione coniugate ed ortogonali : cioè la polare dell'uno deve passare per l'altro, ora la polare in forma matriciale del punto $P_\infty(1, m, 0)$ è

$$(1, m, 0) \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

Siccome detta polare deve passare per il coniugato-ortogonale di P_∞ : cioè $P'_\infty(m, -1, 0)$

Allora si ha:

$$(1, m, 0) \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$$

Che ridotta dà :

$$(1, m) \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} = (0)$$

Risolvendo si ha $Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0$, da cui $m_{1,2} = \frac{C-A \pm \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B}$

E sapendo che gli assi passano per il centro si ha

$$y - y_c = \frac{C-A \pm \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B} (x - x_c)$$

b) *Coniche non a centro: Parabola*

-) Ricerca asse: l'equazione si determina facendo la retta polare del punto improprio coniugato e ortogonale al punto improprio della parabola, che si ottiene annullando il

trinomio di secondo grado: $P_\infty(1, m, 0)$, con $m = \frac{C-A}{B}$

$$|m \quad -1 \quad 0| \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calcolo coordinate dei vertici

La ricerca dei vertici avviene anche in questo contesto risolvendo il sistema tra l'equazione della conica e quella degli assi.

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y - y_c = \frac{C-A \pm \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B} (x - x_c) \end{cases}$$

Calcolo delle equazioni degli asintoti per l'iperbole

La ricerca degli asintoti avviene anche in questo contesto o scomponendo il polinomio

$$1) \quad A(x - x_c)^2 + B(x - x_c)(y - y_c) + C(y - y_c)^2$$

Ed uguagliando a zero i fattori e si ottengono le equazioni di due rette che sono gli asintoti dell'iperbole. Tale polinomio è ottenuto da

$$|x - x_c \quad y - y_c| \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{vmatrix}$$

Indicazioni operative per ricerca dei fuochi e delle direttrici

Anche in questo contesto si applica l'algoritmo esposto precedentemente col metodo delle coordinate omogenee

- 1) Sia $F(\alpha; \beta)$ un punto generico dell'asse, che in coordinate parametriche è, posto $\alpha = t$, allora $\beta = g(t)$, dove $g(x) = 0$ è l'equazione dell'asse, $F(t; g(t))$.
- 2) Si calcola la polare relativa ad F : detta direttrice
- 3) Si determina l'equazione della conica noto il fuoco e la direttrice

- 4) Si effettua un'identità polinomiale fra l'equazione data della conica e quella trovata e si determinano le coordinate di F e l'equazione della direttrice.

Calcolo dell'equazione della retta tangente in un punto

La ricerca della retta tangente in un punto proprio $P(x_p, y_p, 1)$ della conica, si risolve la seguente equazione matriciale, ricordando che la tangente è la polare di P rispetto alla conica:

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esercizi guida:

- 4) Data l'equazione della conica $4x^2 - 4xy + y^2 - 20x - 40y = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenere, punti, rette notevoli, equazione canonica ed infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione

Per stabilire il *tipo* di conica calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione: $\Delta = 16 - 16 = 0$. Poiché $\Delta = 0$, la conica è una parabola. Per stabilire se la conica è o non è degenere calcoliamo il determinante della matrice cubica associata alla conica:

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & -10 \\ -2 & 1 & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{bmatrix} = (0 - 400 - 400) - (100 + 1600 + 0) = -2500 \neq 0$$

Poiché tale determinante è diverso da zero la parabola non è degenere: cioè il polinomio presente nell'equazione non è decomponibile in fattori di primo grado e la parabola non è riducibile a rette parallele.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero, la parabola è ruotata; poichè i coefficienti dei monomi dove le variabili compaiono a primo grado sono diversi da zero, la parabola è traslata; poichè il termine noto dell'equazione è zero, la parabola passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una parabola non degenere, ruotata, traslata e passante per l'origine del sistema cartesiano,

Asse: Per definizione di asse sappiamo che è la polare del punto improprio coniugato ortogonale al punto improprio della parabola. Il punto improprio di questa parabola si ottiene annullando il trinomio di secondo grado: $(2x - y)^2 = 0 \rightarrow y = 2x \rightarrow P_\infty(1; 2; 0)$, il suo coniugato ortogonale è $P'_\infty(2; -1; 0)$. Calcoliamo col metodo dello sdoppiamento la polare di P'_∞ rispetto alla parabola data: $4 \cdot 2 \cdot x - 2(-1x + 2y) - 1 \cdot y - 10(2) - 20(-1) = 0$

Da cui moltiplicando si ha $8x + 2x - 4y - y - 20 + 20 = 0$. Riducendo si ha: $2x - y = 0$.

Quindi equazione dell'asse della parabola è: $t \equiv 2x - y = 0$

Vertice: Il vertice della parabola è l'intersezione della parabola con il suo asse. Pertanto le coordinate del vertice sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 - 20x - 40y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad V(0; 0)$$

Il vertice in questo contesto coincide con l'origine del sistema cartesiano xOy.

Ricerca del fuoco e della direttrice, applicando la definizione di parabola e un'identità polinomiale. Il fuoco appartiene all'asse della parabola, pertanto le sue coordinate sono

$F(\alpha; 2\alpha)$; la direttrice della parabola è la polare del fuoco, pertanto

$$4 \cdot \alpha \cdot x - 2(2\alpha x + \alpha y) + 2\alpha \cdot y - 10(x + \alpha) - 20(y + 2\alpha) = 0$$

da cui moltiplicando si ha:

$$4\alpha x - 4\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha y - 10x - 10\alpha - 20y - 40\alpha = 0$$

Riducendo si ha $x + 2y + 5\alpha = 0$. Quindi l'equazione della direttrice è: $d \equiv x + 2y + 5\alpha = 0$

Applichiamo la definizione di parabola: sia $P(x; y)$ un generico punto del piano, perché esso appartenga alla parabola di fuoco F e direttrice d , deve valere la seguente relazione:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = 1 \quad \text{che è lo stesso} \quad d(P,F) = d(P,d)$$

Calcoliamo le due distanze:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-2\alpha)^2} \quad ; \quad d(P,d) = \frac{|x+2y+5\alpha|}{\sqrt{5}}$$

Le uguagliamo e le eleviamo al quadrato, ottenendo:

$$(x-\alpha)^2 + (y-2\alpha)^2 = \frac{1}{5}(x+2y+5\alpha)^2$$

Sviluppando i quadrati e operando il m.c.d., si ha

$$5x^2 + 5y^2 - 10\alpha x - 20\alpha y + 5\alpha^2 + 20\alpha^2 = x^2 + 4y^2 + 25\alpha^2 + 4xy + 10\alpha x + 20\alpha y$$

Portando al primo membro e sommando i monomi simili, si ha

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 20\alpha x - 40\alpha y = 0$$

Applicando l'identità polinomiale tra l'equazione della conica data e quella ora trovata, si ha che

$$\alpha = 1$$

Sostituendo in F e nell'equazione della direttrice, si ricavano le coordinate del fuoco: $F(1; 2)$,

L'equazione della direttrice: $d \equiv x + 2y + 5 = 0$

Ricerca dell'equazione della forma canonica della parabola.

Possiamo seguire due metodi

- quello di uguagliare i valori degli invarianti della conica data e con quelli dell'equazione canonica della parabola: $ax^2+by=0$,
- quello di calcolare la matrice diagonale della matrice simmetrica di elementi reali J_3 associata alla conica data.

In questo esercizio scegliamo il primo metodo, in quanto il testo non chiede di determinare il sistema di trasformazione (che in questo contesto è solo rotazionale) che permette di passare dalla forma generale alla forma canonica.

I determinanti degli invarianti della conica data sono

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & -10 \\ -2 & 1 & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{bmatrix} = (0 - 400 - 400) - (100 + 1600 + 0) = -2500 \neq 0$$

$$J_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$J_1 = \det[4 + 1] = 5$$

I determinanti degli invarianti della parabola canonica sono

$$J'_3 = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{ab^2}{4} \quad ; \quad J'_2 = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad J'_3 = \det [a + 0] = a$$

Uguagliando i valori degli invarianti omologhi, si ha:

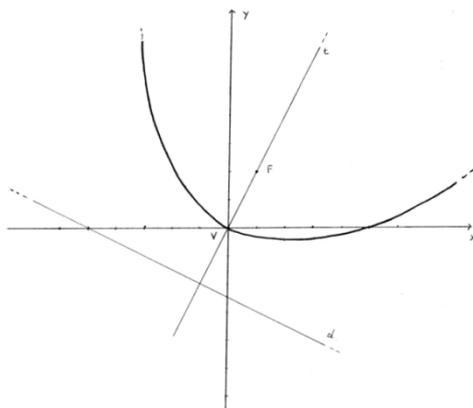
$$\begin{cases} -\frac{ab^2}{4} = -2500 \\ a = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 2000 \\ a = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \pm 20\sqrt{5} \\ a = 5 \end{cases}$$

Tenuto conto che la parabola presenta la concavità verso il semiasse positivo delle ordinate, la sua forma canonica è

$$5x^2 - 20\sqrt{5}y = 0$$

Che semplificata ed esplicitata, risulta: $y = \frac{\sqrt{5}}{20}x^2$:

Grafico:



- 5) Data l'equazione della conica $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenera, punti, rette notevoli, equazione canonica, specificando il tipo di trasformazione alla quale è stata soggetta la conica e scrivendo le equazioni della trasformazione, ed infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione

Per stabilire il *tipo* di conica calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione: $\Delta = 16 - 16 = 0$. Poiché $\Delta = 0$, la conica è una parabola. Per stabilire se la conica è o non è degenere calcoliamo il determinante della matrice cubica associata alla conica:

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = (-12 - 6 - 6) - (9 - 12 + 4) = -25 \neq 0$$

Poiché tale determinante è diverso da zero la parabola non è degenere.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero, la parabola è ruotata; poiché i coefficienti dei monomi dove le variabili compaiono a primo grado sono diversi da zero, la parabola è traslata; poiché il termine noto dell'equazione è diverso da zero, la parabola non passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una parabola non degenere, ruotata, traslata e non passante per l'origine del sistema cartesiano,

Asse: Per definizione di asse sappiamo che è la polare del punto improprio coniugato ortogonale al punto improprio della parabola. Il punto improprio di questa parabola si ottiene annullando il trinomio di secondo grado: $(2x - y)^2 = 0 \rightarrow y = 2x \rightarrow P_\infty(1; 2; 0)$, il suo coniugato ortogonale è $P'_\infty(2; -1; 0)$. Calcoliamo col metodo dello sdoppiamento la polare di P'_∞ rispetto alla parabola data: $4 \cdot 2 \cdot x - 2(-1x + 2y) - 1 \cdot y + 3(2) + 1(-1) = 0$
Da cui moltiplicando si ha $8x + 2x - 4y - y + 6 - 1 = 0$. Riducendo si ha: $2x - y + 1 = 0$.
Quindi equazione dell'asse della parabola è: $t \equiv 2x - y + 1 = 0$

Vertice: Il vertice della parabola è l'intersezione della parabola con il suo asse. Pertanto le coordinate del vertice sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad V(0; 1)$$

Ricerca del fuoco e della direttrice, applicando la definizione di parabola e un'identità polinomiale. Il fuoco appartiene all'asse della parabola, pertanto le sue coordinate sono

$F(\alpha; 2\alpha + 1)$; la direttrice della parabola è la polare del fuoco, pertanto

$$4 \cdot \alpha \cdot x - 2[(2\alpha + 1)x + \alpha y] + (2\alpha + 1) \cdot y + 3(x + \alpha) + 1(y + 2\alpha + 1) - 3 = 0$$

da cui moltiplicando si ha:

$$4\alpha x - 4\alpha x - 2x - 2\alpha y + 2\alpha y + y + 3x + 3\alpha + y + 2\alpha + 1 - 3 = 0.$$

Riducendo si ha $x + 2y + 5\alpha - 2 = 0$. Quindi l'equazione della direttrice è:

$d \equiv x + 2y + 5\alpha + 1 = 0$ Applichiamo la definizione di parabola: sia $P(x; y)$ un generico punto del piano, perché esso appartenga alla parabola di fuoco F e direttrice d , deve valere la seguente relazione:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = 1 \quad \text{che è lo stesso} \quad d(P,F) = d(P,d)$$

Calcoliamo le due distanze:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-2\alpha-1)^2} \quad ; \quad d(P,d) = \frac{|x+2y+5\alpha-2|}{\sqrt{5}}$$

Le uguagliamo e le eleviamo al quadrato, ottenendo:

$$(x-\alpha)^2 + (y-2\alpha-1)^2 = \frac{1}{5}(x+2y+5\alpha-2)^2$$

Sviluppando i quadrati e operando il m.c.d., si ha

$$5x^2 + 5y^2 - 10\alpha x - 20\alpha y - 10y + 25\alpha^2 + 20\alpha + 5 = x^2 + 4y^2 + 25\alpha^2 + 4 + 4xy + 10\alpha x - 4x + 20\alpha y - 8y - 20\alpha$$

Portando al primo membro e sommando i monomi simili, si ha

$$4x^2 - 4xy + y^2 - (20\alpha - 4)x - (40\alpha + 2)y + 40\alpha + 1 = 0$$

Applicando l'identità polinomiale tra l'equazione della conica data e quella ora trovata, si ha che

$$\alpha = -\frac{1}{10}$$

Sostituendo in F e nell'equazione della direttrice, si ricavano le coordinate del fuoco: $F(-\frac{1}{10}; \frac{4}{5})$, e l'equazione della direttrice: $d \equiv 2x + 4y - 5 = 0$

Ricerca dell'equazione della forma canonica della parabola.

Possiamo seguire due metodi

- quello di uguagliare i valori degli invarianti della conica data e con quelli dell'equazione canonica della parabola: $ax^2+by=0$,
- quello di calcolare la matrice diagonale della matrice simmetrica di elementi reali J_2 associata alla conica data.

In questo esercizio scegliamo il secondo metodo, in quanto il testo chiede di determinare la trasformazione (che in questo contesto è roto-traslatorio) che permette di passare dalla forma generale alla forma canonica.

Calcoliamo gli autovalori di J_2 , risolvendo l'equazione caratteristica: $\det [J_2 - \lambda I] = 0$.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 : \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 5$$

Calcoliamo gli autovettori relativi agli autovalori:

$$\text{per } \lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2x \rightarrow \vec{v}_1(1; 2)$$

$$\text{per } \lambda_2 = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -1x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2y \rightarrow \vec{v}_2(2; -1)$$

i due autovettori trovati risultano indipendenti, perché la matrice costituita da detti vettori ammette determinante diverso da zero: $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -5 \neq 0$, risultano pure ortogonali, in quanto il loro prodotto scalare è nullo: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Normalizziamo tali vettori: cioè rendiamo unitario il loro modulo; per far ciò dividiamo le componenti per il modulo del vettore

$$\vec{v}'_1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \quad \vec{v}'_2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

Con questi vettori costruiamo una base ortonormale, che costituirà la matrice associata alla trasformazione isometrica rotazionale:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{a cui corrisponde } \mathbf{p} = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

Il vettore traslante è costituito dalle coordinate cambiate di segno del vertice della parabola a cui è associata la matrice colonna $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Pertanto la trasformazione roto-traslatoria è definita da:

$$\mathcal{J} = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - 1 \end{cases}$$

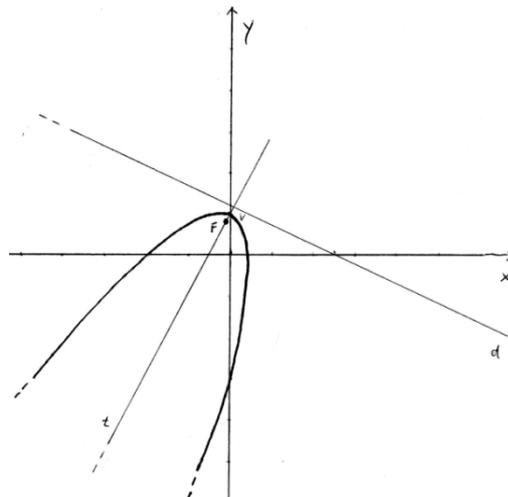
$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + 1 \end{cases}$$

Questa trasformazione determina l'equazione canonica del tipo $ay^2 + bx = 0$, essendo il coefficiente di x^2 maggiore di quello della y^2 , dove $a = \lambda_2 = 5$ e $b = 2 \sqrt{-\frac{J_3}{J_1}} = 2 \sqrt{-\frac{-25}{5}} = 2\sqrt{5}$

Pertanto l'equazione canonica relativa alla trasformazione è $5y^2 + 2\sqrt{5}x = 0$,

$$y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x^2$$

Grafico della conica data:



- 6) Data l'equazione della conica $x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenere, punti, rette notevoli, equazione canonica, specificando il tipo di trasformazione alla quale è stata soggetta la conica e scrivendo le equazioni della trasformazione, ed infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione

Per stabilire il *tipo* di conica calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione: $\Delta = 64 - 28 = 36$. Poiché $\Delta > 0$, la conica è un'iperbole. Per stabilire se la conica è o non è degenere calcoliamo il determinante della matrice cubica associata alla conica:

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = (-28 - 8 - 8) - (28 - 64 + 1) = -9 \neq 0$$

Poiché tale determinante è diverso da zero l'iperbole non è degenere.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero, l'iperbole è ruotata; poiché i coefficienti dei monomi dove le variabili compaiono a primo grado sono diversi da zero, l'iperbole è traslata; poiché il termine noto dell'equazione è diverso da zero, l'iperbole non passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una iperbole non degenere, ruotata, traslata e non passante per l'origine del sistema cartesiano.

Ricerca del centro:

Risolviamo l'equazione matriciale: $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ -4x + 7y + 1 = 0 \end{cases}$

Le due equazioni del sistema sono le equazioni di due diametri coniugati dell'iperbole e precisamente ai punti impropri: $X_\infty(1; 0; 0)$ e $Y_\infty(0; 1; 0)$.

Risolviendo il sistema col metodo di Cramer si ha: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Tali soluzioni sono le coordinate del centro $C(2; 1)$, perché tutti i diametri di una conica passano per il centro.

Ricerca assi

Gli assi come i diametri appartengono al fascio di rette passante per il centro, quindi l'equazione è $y - 1 = m(x - 2)$.

Il coefficiente angolare è dato dalla formula: $m_{1,2} = \frac{(C-A) \pm \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B}$, dove A,B,C sono i coefficienti della conica. Sostituendo in detta formula i valori, si ottengono:

$$m_1 = \frac{(7-1) - \sqrt{(7-1)^2 + 8^2}}{-8} = \frac{6-10}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} ; \quad m_2 = \frac{(7-1) + \sqrt{(7-1)^2 + 8^2}}{-8} = \frac{6+10}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Pertanto le equazioni dei due assi sono:

$$t_1 \equiv x - 2y = 0 \quad \text{e} \quad t_2 \equiv 2x + y - 5 = 0$$

Ricerca asintoti.

Gli asintoti sono le rette passanti per i punti impropri dell'iperbole e passanti per il suo centro.

Pertanto scomponendo in fattori il trinomio di secondo grado e per ogni fattore trovando il fascio improprio di rette: cioè $x^2 - 8xy + 7y^2 = (x - 7y)(x - y)$; $x - 7y + h = 0$ e $x - y + k = 0$; e, imponendo il passaggio per il centro, si trovano i valori di h e k : $2 - 7 + h = 0 \rightarrow h = 5$, $2 - 1 + k = 0 \rightarrow k = -1$, ed infine si determinano le equazioni degli asintoti, che sono

$$s_1 \equiv x - 7y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad s_2 \equiv x - y - 1 = 0$$

Ricerca vertici:

I vertici si determinano intersecando l'iperbole con gli assi: cioè risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 45x^2 - 180x + 181 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

Poiché il discriminante del trinomio è $\Delta = -45 < 0$, le sue soluzioni sono coniugate e complesse non accettabili nel campo reale.

$$\begin{cases} x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5y^2 - 10y + 4 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{5} \\ x_{1,2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

L'asse t_1 costituisce l'asse trasverso, mentre t_2 l'asse secondario. I vertici sono

$$V_1 \left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}; \frac{5 - \sqrt{5}}{5} \right) \quad \text{e} \quad V_2 \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}; \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \right)$$

Ricerca fuochi e direttrici.

Per la ricerca dei fuochi e delle direttrici applichiamo il metodo delle trasformazioni e quindi è necessario determinare la matrice della trasformazione roto-traslatoria.

Intanto sappiamo che i fuochi appartengono all'asse trasverso, pertanto le loro coordinate saranno del tipo: $F(2\alpha; \alpha)$; e che le direttrici sono due rette perpendicolari all'asse trasverso, pertanto le loro equazioni sono del tipo $2x + y + h = 0$.

Ricerca equazione canonica.

L'equazione canonica dell'iperbole è $ax^2 + by^2 + c = 0$, con a e b autovalori dell'invariante quadratico della conica: J_2 , e $c = \frac{\det J_3}{\det J_2}$.

Calcoliamo gli autovalori, risolvendo l'equazione caratteristica di J_2 : $\det [J_2 - \lambda I] = 0$

Che sviluppata risulta: $\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ -4 & 7 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 9$

$\det J_3 = -9$, $\det J_2 = -9$, pertanto il valore di $c = 1$. Quindi l'equazione canonica risulta, posto $a = \lambda_1$ e $b = \lambda_2$, $-x^2 + 9y^2 + 1 = 0$, che ridotta a forma normale diviene:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Da cui possiamo ricavare le coordinate dei fuochi $F_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{10}}{3}; 0\right)$

Mentre le direttrici relative sono $d_1 \equiv x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e $d_2 \equiv \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Calcoliamo gli autovettori relativi agli autovalori λ_1 e λ_2 di J_2 .

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 8y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y \rightarrow \vec{v}_1(2; 1)$$

$$\lambda_2 = 9 \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -8x - 4y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2x \rightarrow \vec{v}_1(-1; 2)$$

verifichiamo se i due vettori sono indipendenti e se sono ortogonali:

perché siano indipendenti la matrice da essi costituita deve ammettere determinante diverso da zero: $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0$, quindi i due vettori sono indipendenti;

perché siano ortogonali il loro prodotto scalare deve essere nullo: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$ quindi i due vettori sono ortogonali

Normalizziamo tali vettori: per normalizzare un vettore basta dividere le componenti per il modulo del vettore: $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} = \|\vec{v}_2\|$, quindi i due vettori normalizzati risultano:

$$\vec{v}_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Con tali vettori ci costruiamo la matrice ortonormale che costituisce una base per R^2 :

$$\mathcal{B} \equiv \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

L'equazione matriciale della trasformazione rotazionale è $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Il vettore traslante e quello le cui componenti sono le coordinate del centro dell'iperbole: $\vec{w}(2; 1)$

La trasformazione roto-traslatoria è $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, che trasformata in forma

normale è

$$\rho = \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x + y - 5) \\ y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(-x + 2y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) + 2 \\ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) + 1 \end{cases}$$

Infatti, applicando tale trasformazione all'equazione della conica data, otteniamo l'equazione canonica:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)+2\right]^2 - 8\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)+2\right]\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)+1\right] + 7\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)+1\right]^2 + 4\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)+2\right] + 2\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)+1\right] - 4 = 0$$

$$4x^2 + y^2 + 20 - 4xy + 8\sqrt{5} - 4\sqrt{5}y - 16x^2 - 32xy - 16\sqrt{5}x + 8xy + 16y^2 + 8\sqrt{5}y - 16\sqrt{5} - 32\sqrt{5}y - 80 + 7x^2 + 28y^2 + 35 + 28xy + 14\sqrt{5}x + 28\sqrt{5}y + 8\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 40 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 10 - 20 = 0$$

Sommando i monomi simili si ha: $-5x^2 + 45y^2 + 5 = 0$, dividendo ambo i membri dell'equazione per -5 , si ottiene: $x^2 - 9y^2 - 1 = 0$, che ridotta in forma normale si ha la forma canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

I fuochi e le direttrici della conica data sono date applicando la trasformazione:

$$\rho^{-1} = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)+2 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)+1 \\ \left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5}(2x+y-5) \\ y \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5}(-x+2y) \end{array} \right. \end{cases}$$

in quanto partiamo dall'equazione canonica e non dall'equazione della conica data:

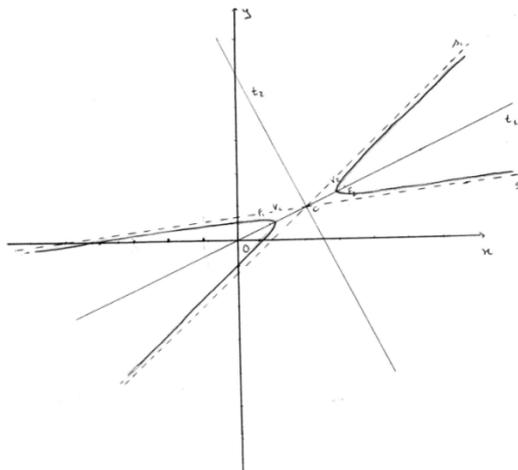
$$F_1\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2; -\frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right), F_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2; \frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right);$$

$$d_1 \equiv 2x + y - \frac{10-3\sqrt{2}}{2} = 0 \quad e \quad d_2 \equiv 2x + y - \frac{10+3\sqrt{2}}{2} = 0$$

Ricerca eccentricità:

$$\text{semiasse trasverso} = 1 \quad ; \quad \text{semiasse secondario} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \text{eccentricità} : e = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Grafico



- 7) Data l'equazione della conica $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0$, stabilire il tipo e determinare, nel caso che non sia degenere, punti, rette notevoli, equazione canonica, specificando il tipo di trasformazione alla quale è stata soggetta la conica e scrivendo le equazioni della trasformazione, ed infine tracciare il relativo grafico.

Risoluzione

Per stabilire il *tipo* di conica calcoliamo il discriminante del trinomio di secondo grado presente nell'equazione: $\Delta = 4 - 196 = -192$. Poiché $\Delta < 0$, la conica è un'ellisse. Per stabilire se la conica è o non è degenere calcoliamo il determinante della matrice cubica associata alla conica:

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} 7 & -1 & 17 \\ -1 & 7 & 1 \\ 17 & 1 & 31 \end{bmatrix} = (1519 - 17 - 17) - (2023 + 31 + 7) = -576 \neq 0$$

Poiché tale determinante è diverso da zero l'ellisse non è degenere.

Poiché il coefficiente del monomio di secondo grado misto è diverso da zero, l'ellisse è ruotata; poiché i coefficienti dei monomi dove le variabili compaiono a primo grado sono diversi da zero, l'ellisse è traslata; poiché il termine noto dell'equazione è diverso da zero, l'ellisse non passa per l'origine del sistema di riferimento.

Relativamente al *tipo* in sintesi possiamo dire che l'equazione data è l'equazione di una ellisse non degenere, ruotata, traslata e non passante per l'origine del sistema cartesiano.

Ricerca del centro:

RisolviAMO l'equazione matriciale: $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 17 \\ -1 & 7 & 1 \\ 17 & 1 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 7x - y + 17 = 0 \\ -x + 7y + 1 = 0 \end{cases}$

Le due equazioni del sistema sono le equazioni di due diametri coniugati dell'ellisse e precisamente ai punti impropri: $X_\infty(1; 0; 0)$ e $Y_\infty(0; 1; 0)$.

Risolvendo il sistema col metodo di Cramer si ha: $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Tali soluzioni sono le coordinate del centro $C(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$, perché tutti i diametri di una conica passano per il centro.

Ricerca assi

Gli assi come i diametri appartengono al fascio di rette passante per il centro, quindi l'equazione è $y + \frac{1}{2} = m(x + \frac{5}{2})$.

Il coefficiente angolare è dato dalla formula: $m_{1,2} = \frac{(C-A) \pm \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B}$, dove A,B,C sono i coefficienti della conica. Sostituendo in detta formula i valori, si ottengono:

$$m_1 = \frac{(7-7) - \sqrt{(7-7)^2 + (-2)^2}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad ; \quad m_2 = \frac{(7-7) + \sqrt{(7-7)^2 + (-2)^2}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Pertanto le equazioni dei due assi sono:

$$t_1 \equiv x - y + 2 = 0 \quad \text{e} \quad t_2 \equiv x + y + 3 = 0$$

Ricerca vertici:

I vertici si determinano intersecando l'ellisse con gli assi: cioè risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} 7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 20x + 21 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-10 \pm 4}{4} \\ y_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} \\ y_1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad A_1 \left(-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2} \right), \quad A_2 \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} 7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 10x + 11 = 0 \\ y = -x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2} \\ y_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-5 - \sqrt{3}}{2} \\ y_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 = \frac{-5 + \sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad B_1 \left(\frac{-5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right), \quad B_2 \left(\frac{-5 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right)$$

Semiassse maggiore $a = \sqrt{2}$; semiassse minore $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$; semidistanza focale $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

eccentricità $e = \frac{1}{2}$

Ricerca fuochi e direttrici.

Per la ricerca dei fuochi e delle direttrici applichiamo il metodo delle trasformazioni e quindi è necessario determinare la matrice della trasformazione roto-traslatoria.

Intanto sappiamo che i fuochi appartengono all'asse principale: $y = x + 2$, pertanto le loro coordinate saranno del tipo: $F(\alpha; \alpha + 2)$; e che le direttrici sono due rette perpendicolari all'asse principale, pertanto le loro equazioni sono del tipo $x + y + h = 0$.

Ricerca equazione canonica.

L'equazione canonica dell'ellisse è $ax^2 + by^2 + c = 0$, con a e b autovalori dell'invariante quadratico della conica: J_2 , e $c = \frac{\det J_3}{\det J_2}$.

Calcoliamo gli autovalori, risolvendo l'equazione caratteristica di J_2 : $\det [J_2 - \lambda I] = 0$

Che sviluppata risulta: $\det \begin{bmatrix} 7 - \lambda & -1 \\ -1 & 7 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 6 \text{ e}$

$$\lambda_2 = 8$$

$\det J_3 = -576$, $\det J_2 = 48$, pertanto il valore di $c = -12$. Quindi l'equazione canonica risulta, posto $a = \lambda_1$ e $b = \lambda_2$, $6x^2 + 8y^2 - 12 = 0$, che ridotta a forma normale diviene:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Da cui possiamo ricavare le coordinate dei fuochi $F_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$, $F_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$

Mentre le direttrici relative sono $d_1 \equiv x = -2\sqrt{2}$ e $d_2 \equiv x = 2\sqrt{2}$

Calcoliamo gli autovettori relativi agli autovalori λ_1 e λ_2 di J_2 .

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = y \rightarrow \vec{v}_1(1; 1)$$

$$\lambda_2 = 9 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \rightarrow y = -x \rightarrow \vec{v}_1(-1; 1)$$

verifichiamo se i due vettori sono indipendenti e se sono ortogonali:

perché siano indipendenti la matrice da essi costituita deve ammettere determinante diverso da zero: $\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$, quindi i due vettori sono indipendenti;

perché siano ortogonali il loro prodotto scalare deve essere nullo: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$ quindi i due vettori sono ortogonali

Normalizziamo tali vettori: per normalizzare un vettore basta dividere le componenti per il modulo del vettore: $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = \|\vec{v}_2\|$, quindi i due vettori normalizzati risultano:

$$\vec{v}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Con tali vettori ci costruiamo la matrice ortonormale che costituisce una base per R^2 :

$$\mathcal{B} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

L'equazione matriciale della trasformazione rotazionale è $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Il vettore traslante e quello le cui componenti sono le coordinate opposte del centro dell'ellisse:

$$\vec{w} \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

La trasformazione roto-traslatoria è $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, che trasformata in forma

$$\text{normale è} \quad \rho = \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+3) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y-2) \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{5}{2} \\ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Infatti, applicando tale trasformazione all'equazione della conica data, otteniamo l'equazione canonica:

$$7 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{5}{2} \right]^2 - 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{5}{2} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{2} \right] + 7 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{2} \right]^2 + 34 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{5}{2} \right] + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{2} \right] + 31 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x^2 - 7xy + \frac{7}{2}y^2 - \frac{35}{\sqrt{2}}x + \frac{35}{\sqrt{2}}y + \frac{175}{4} - x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{5}{\sqrt{2}}x + \frac{5}{\sqrt{2}}y - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}x^2 \\ + 7xy + \frac{7}{2}y^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}x - \frac{7}{\sqrt{2}}y + \frac{7}{4} + \frac{36}{\sqrt{2}}x - \frac{36}{\sqrt{2}}y - 55 = 0 \end{aligned}$$

Sommando i monomi simili si ha: $6x^2 + 8y^2 - 12 = 0$, dividendo ambo i membri dell'equazione per 12, si ottiene $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} - 1 = 0$, che ridotta in forma normale si ha la forma canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

I fuochi e le direttrici della conica data sono date applicando la trasformazione:

$$\rho^{-1} = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{5}{2} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

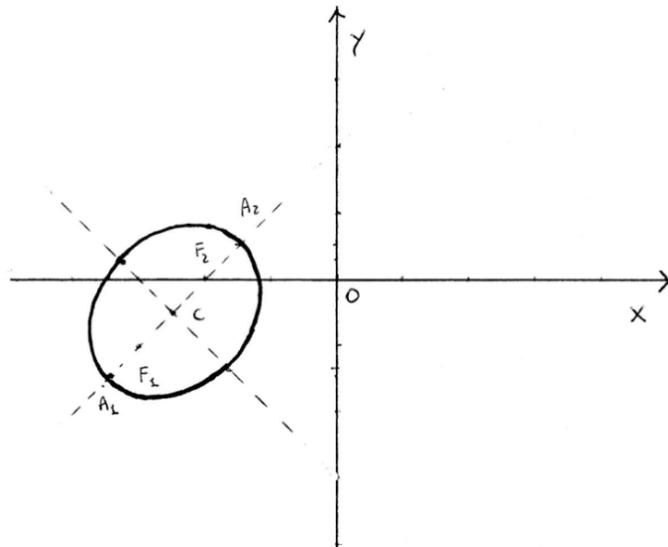
$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+3) \\ y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y-2) \end{cases}$$

in quanto partiamo dall'equazione canonica e non dall'equazione della conica data:

$$F_1(-3; -1), F_2(-2; 0);$$

$$d_1 \equiv x + y + 7 = 0 \quad \text{e} \quad d_2 \equiv x + y - 1 = 0$$

Grafico



PROPRIETÀ METRICHE E PROBLEMI
SULLE CONICHE

1 Parabola

- Area del segmento parabolico:

Ricerca dell'area della parabola col metodo di esaustione di Archimede:

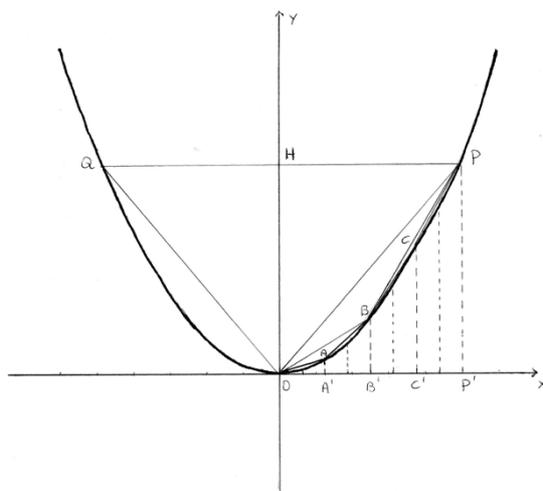


Fig. 1

Dimostriamo che l'area del segmento parabolico in giallo in figura 1) è $i \frac{4}{3}$ dell'area del triangolo QOP, essendo QP parallelo alla tangente, in questo caso all'asse delle ascisse, nel vertice della parabola. Qualora QP non fosse parallelo alla tangente nel vertice, si traccia la tangente geometrica alla parabola parallela alla corda QP, questa tange la parabola nel punto T; si dimostra, sfruttando le trasformazioni affini delle figure piane che ancora l'area del segmento parabolico è $i \frac{4}{3}$ dell'area del triangolo PTQ.

Sia data l'equazione della parabola nella forma classica $y = ax^2$: con $y = OH$, $x = HP$ e $a = l$, dove l è il latus rectus. Dividiamo il segmento parabolico in due parti uguali: QOH e HOP, sfruttando la simmetria della parabola canonica rispetto al suo asse OH. Consideriamo il segmento OP' proiezione dell'arco OP di parabola sulla tangente al vertice e dividiamo in 2 parti uguali OP' e siano $OB' = B'P'$; dividiamo

I segmenti OB' e $B'P'$ in due parti uguali: $OA' = A'B'$ e $B'C' = C'P'$; dividiamo i segmenti OA' , $A'B'$, $B'C'$, $C'P'$ in due parti uguali: $OD' = D'A'$, $A'E' = E'B'$, $B'F' = F'C'$, $C'E' = E'P'$; e così di seguito.

Da questi punti tracciamo i segmenti paralleli di estremi detti punti e i punti di intersezione con l'arco di parabola: D, A, E, B, F, C, E, P. L'area di metà segmento parabolico sarà la somma di tutti i triangoli così determinati:

$$A_{Seg(HOP)} = A_{HOP} + A_{OBP} + A_{OAB} + A_{OCP} + A_{ODA} + \dots$$

La formula della parabola per un generico punto P è data da : $OH = l \cdot HP^2$ nella forma classica.

Calcoliamo ora le diverse aree dei triangoli:

$$A_{HOP} = \frac{1}{2} HP \cdot HO = \frac{1}{2} HP \cdot (l \cdot HP^2) = \frac{1}{2} l \cdot HP^3$$

$$A_{OBP} = A_{OPP'} - A_{OBB'} - A_{BB'P'P} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} HP \cdot PP' - \frac{1}{2} OB' \cdot BB' - \frac{1}{2} (BB' + PP') \cdot B'P' = \frac{1}{2} HP \cdot PP' - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} HP \right) \cdot BB' - \frac{1}{2} (BB' + PP') \cdot HP = \\ & = \frac{1}{2} HP \cdot PP' - \frac{1}{4} HP \cdot BB' - \frac{1}{4} HP \cdot BB' - \frac{1}{4} HP \cdot PP' = \frac{1}{2} HP \left(PP' - \frac{1}{2} BB' - \frac{1}{2} BB' - \frac{1}{2} PP' \right) = \\ & = \frac{1}{2} HP \left(\frac{1}{2} PP' - BB' \right) = \frac{1}{2} HP \left[\frac{1}{2} l \cdot HP^2 - l \left(\frac{HP}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{8} l \cdot HP^3 = \frac{1}{8} A_{QOP} \end{aligned}$$

$$A_{OAB} = A_{OBB'} - A_{OAA'} - A_{AA'B'B} =$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} OB' \cdot B'B - \frac{1}{2} OA' \cdot A'A - \frac{1}{2} A'B' \cdot (AA' + BB') = \\ & = \frac{1}{2} OB' \cdot B'B - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} OB' \right) \cdot A'A - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} OB' \right) \cdot (AA' + BB') = \\ & = \frac{1}{2} OB' \left(BB' - \frac{1}{2} AA' - \frac{1}{2} AA' - \frac{1}{2} BB' \right) = \frac{1}{2} OB' \left(\frac{1}{2} BB' - AA' \right) = \frac{1}{2} OB' \left(\frac{1}{2} l OB'^2 - \frac{1}{4} l OB'^2 \right) = \\ & = \frac{1}{8} l OB'^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} l HP^3 \right) = \frac{1}{8} A_{OBP} \end{aligned}$$

$$A_{BCP} = A_{BB'P'P} - A_{BB'C'C} - A_{CC'P'P} =$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} B'P' \cdot (BB' + PP') - \frac{1}{2} B'C' \cdot (BB' + CC') - \frac{1}{2} C'P' \cdot (CC' + PP') = \\ & = \frac{1}{2} B'P' \cdot (BB' + PP') - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} B'P' \right) \cdot (BB' + CC') - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} B'P' \right) \cdot (CC' + PP') = \\ & = \frac{1}{2} B'P' \left(BB' + PP' - \frac{1}{2} BB' - \frac{1}{2} CC' - \frac{1}{2} CC' - \frac{1}{2} PP' \right) = \frac{1}{2} B'P' \left(\frac{1}{2} BB' + \frac{1}{2} PP' - CC' \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} HP \right) \left(\frac{1}{8} l HP^2 + \frac{1}{2} l HP^2 - \frac{9}{16} l HP^2 \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} l HP^3 = \frac{1}{8} A_{OBP} = A_{AOB} \end{aligned}$$

Iterando il procedimento, abbiamo che

$$A_{ODA} = A_{AEB} = A_{BFC} = A_{CGP} = \frac{1}{8} A_{OAB}$$

Pertanto l'area del semisegmento parabolico A_{HOP} è dato da:

$$A_{HOP} = \frac{1}{2} l HP^3 + \frac{1}{8} l HP^3 + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} l HP^3 + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{64} l HP^3 + \dots$$

mentre l'area dell'intero segmento parabolico A_{QOP} è dato da:

$$A_{QOP} = 2A_{HOP} = lHP^3 + \frac{1}{4}lHP^3 + \frac{1}{16}lHP^3 + \frac{1}{64}lHP^3 + \dots = lHP^3 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right)$$

dentro parentesi si nota la somma infinita di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$

pertanto tale somma vale: $S_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$; quindi sostituendo

otteniamo il valore dell'area

$$\text{del segmento parabolico: } A_{QOP} = \frac{4}{3}lHP^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{QP \cdot OH}{2}$$

Nel caso che la corda QP non è parallela alla tangente nel vertice (figura 2), si determina la retta tangente alla parabola parallela alla corda e si individua il punto di tangenza T, che con gli estremi della corda che determina il triangolo QTP e si applica la stessa regola: cioè l'area del segmento parabolico intercettato dalla corda QP è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo QTP.

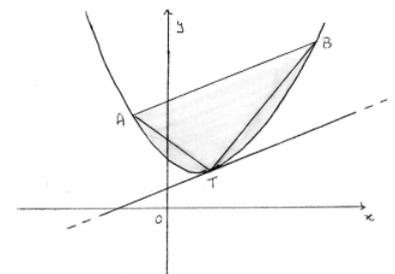


Fig. 2

- **Sottotangente , sottonormale e proprietà relative a vertice. Fuoco, direttrice e tangente**

Relativamente alla figura 3), sia data la parabola canonica di equazione $y = ax^2$ di vertice $O(0;0)$ e fuoco $F(0; \frac{1}{4a})$. Sia P un punto della parabola di coordinate $P(\alpha; a\alpha^2)$. Sia t la retta tangente alla parabola in P, la cui equazione è $y = a\alpha(2x - \alpha)$. Sia T il punto di intersezione della tangente t con l'asse della parabola ($x = 0$):

$$\begin{cases} y = a\alpha(2x - \alpha) \\ x = 0 \end{cases}$$

T ha coordinate $T(0; -a\alpha^2)$. Sia n la retta normale alla parabola nel punto P, la cui equazione è

$$y = -\frac{1}{2a\alpha}x + \frac{1}{2a} + a\alpha^2$$

Sia N il punto di intersezione della retta

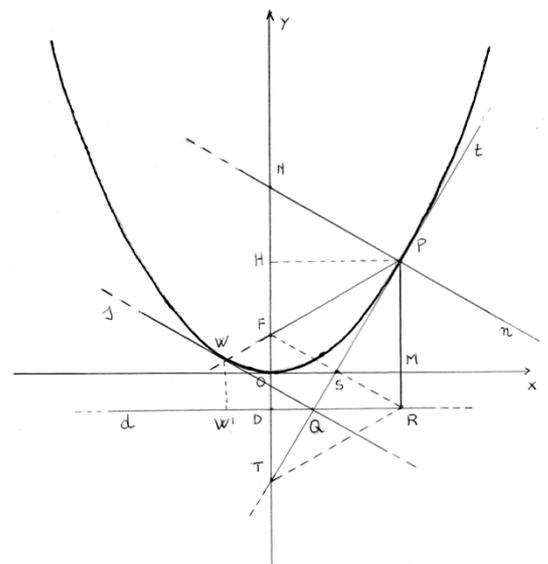


Fig. 3

normale n con l'asse della parabola, le cui coordinate sono date dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2a\alpha}x + \frac{1}{2a} + a\alpha^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{: cioè } N(0; \frac{1}{2a} + a\alpha^2)$$

Sia H il piede del segmento di perpendicolare condotto da P all'asse della parabola: $H(0; a\alpha^2)$

Def. 1) Si chiama *sottotangente* il segmento HT , mentre *sottonormale* il segmento HN .

Il triangolo TPN è un triangolo rettangolo in P , di ipotenusa NT ; la sottotangente e la sottonormale costituiscono i segmenti proiezione sull'asse dei cateti PT e PN . Pertanto relativamente al triangolo TPN valgono i teoremi di Pitagora ed i due Teoremi di Euclide: cioè

$$NT^2 = PN^2 + PT^2 \quad ; \quad PH^2 = NH \cdot HT \quad ; \quad PT^2 = HT \cdot TN \quad \text{e} \quad PN^2 = NH \cdot TN$$

Nel calcolare le coordinate del punto medio del segmento NT , si nota che tale punto medio coincide con il fuoco della parabola $M_{NT} = F$; da qui possiamo affermare che PT , relativamente al triangolo NPT , è la mediana relativa ad NT , ma in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa stessa, quindi $NF = FT = PF$.

Nel calcolare le coordinate del punto medio del segmento HT , si nota che tale punto medio coincide con il vertice della parabola: $HO = OT$. Consideriamo il triangolo PHT , questo risulta rettangolo in H . In questo triangolo O è punto medio di HT . La tangente in O alla parabola, che nel nostro caso coincide con l'asse delle ascisse, è perpendicolare all'asse della parabola (in quanto asse delle ordinate) e pertanto PH è parallelo a tale tangente, che interseca l'ipotenusa PT nel punto S , che per il corollario del teorema di Talete S risulta punto medio di PT e di conseguenza $OS = \frac{1}{2}PH$ quindi

S ha coordinate $S(\frac{\alpha}{2}, 0)$; ed inoltre PHT è equivalente al rettangolo $PHOM$, perché costituito da somma di poligoni congruenti.

Da queste considerazioni di Geometria Analitica possiamo fare delle osservazioni

Osservazione 1)

Tracciato il segmento di perpendicolare da P alla direttrice: sia PR , questo interseca l'asse delle ascisse (cioè la tangente alla parabola nel vertice) nel punto M , di coordinate $M(\alpha; 0)$; si dimostra che i triangoli PMS e SOT sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli. Si dimostra pure che il quadrilatero $PFTR$ è un rombo con le diagonali perpendicolari e pertanto F e R sono punti simmetrici rispetto ad S , quindi R avrà coordinate $R(\alpha; -\frac{1}{4a})$.

Sia Q il punto di intersezione della retta tangente t con la direttrice d , le cui coordinate sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = a\alpha(2x - \alpha) \\ y = -\frac{1}{4a} \end{cases} \quad \rightarrow \quad Q\left(\frac{4a^2\alpha^2 - 1}{8a^2\alpha}; -\frac{1}{4a}\right)$$

Si tracci da Q la parallela s alla retta normale n . La retta s ha equazione:

$$y = -\frac{1}{2a\alpha}\left(x - \frac{4a^2\alpha^2 - 1}{8a^2\alpha}\right) - \frac{1}{4a}$$

Mettendo a sistema tale retta con la parabola:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2a\alpha} \left(x - \frac{4a^2\alpha^2 - 1}{8a^2\alpha} \right) - \frac{1}{4a} \\ y = ax^2 \end{cases}$$

Tale retta interseca la parabola nel punto $W \left(-\frac{1}{4a^2\alpha} ; \frac{1}{16a^3\alpha^2} \right)$, pertanto risulta tangente in detto punto. Ora la retta n è perpendicolare a t , di conseguenza la retta s è perpendicolare a t . Poiché s e t sono rette tangenti condotte da Q , punto della direttrice. Il punto Q risulta, con facili passaggi, punto medio delle proiezioni W' e R dei punti di tangenza P e W sulla direttrice d : si prova pura che $QF = QW' = QR$. Tale situazione può essere generalizzata per tutti i punti della direttrice. Inoltre note le coordinate di Q è possibile determinare immediatamente le coordinate dei punti di tangenza delle tangenti condotte da Q , dopo aver determinato la distanza QF , alla parabola: sia Q

$\left(x_Q; -\frac{1}{4a} \right)$ un generico punto della direttrice e sia $QF = \frac{\sqrt{4a^2(x_Q)^2 + 1}}{2a}$ i punti di tangenza T_1 e

T_2 hanno coordinate $T_1 \left(x_Q + \frac{\sqrt{4a^2(x_Q)^2 + 1}}{2a}; a \left(x_Q + \frac{\sqrt{4a^2(x_Q)^2 + 1}}{2a} \right) \right)$

$T_2 \left(x_Q - \frac{\sqrt{4a^2(x_Q)^2 + 1}}{2a}; a \left(x_Q - \frac{\sqrt{4a^2(x_Q)^2 + 1}}{2a} \right) \right)$

Da dette considerazioni possiamo definire la direttrice di una parabola

Def. 3) La direttrice di una parabola è il luogo geometrico dei punti del piano tale che le rette tangenti condotte da tali punti sono perpendicolari tra loro.

Osservazione 2)

Dall'aver verificato che $FT = PR = HD$, possiamo dedurre un metodo per costruire per punti la parabola.

Infatti, fissati sul piano il fuoco e la direttrice (Fig 4), si traccia la perpendicolare da F alla direttrice e si fissa il punto medio O del segmento di estremi F ed il punto D : intersezione della direttrice con la perpendicolare condotta dal fuoco. A partire da detto vertice O nel verso del fuoco, si prenda un generico punto H_y appartenente alla perpendicolare e si traccia da esso una retta parallela alla direttrice e sia p , quindi si traccia una circonferenza di raggio HyD e centro F . La retta p e la circonferenza si intersecano in due punti, che hanno la caratteristica di essere equidistanti dal fuoco e dalla direttrice e quindi sono punti della parabola che andremo a costruire raccordando tutti i punti al varia di H_y sull'asse.

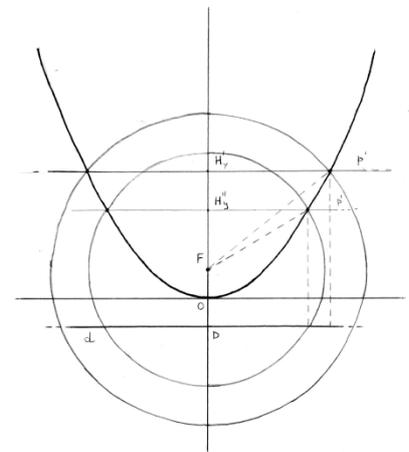


Fig. 4

Osservazione 3

Dall'aver verificato che PFTR è un rombo,

-) possiamo dedurre che la tangente in un punto della parabola è la bisettrice dell'angolo FPR
-) La tangente al vertice di una parabola interseca ogni altra tangente t alla parabola in un punto proiezione ortogonale del fuoco su tale tangente
-) Il punto simmetrico del fuoco rispetto ad una generica tangente appartiene alla direttrice della parabola.

Possiamo sfruttare le considerazioni di quest'ultima osservazione per determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice, nota l'equazione della parabola; e, determinare geometricamente il fuoco, infatti se N è il punto di incontro della normale alla parabola in P, la retta parallela alla retta tangente in P alla parabola condotta per il punto medio del segmento PN interseca l'asse nel fuoco F.

- Proprietà generali sulla Parabola

Dalle considerazioni effettuate al numero 2 possiamo dedurre queste prime due proprietà:

Proposizione 1). L'asse di simmetria della parabola è un diametro, così pure tutte le semirette parallele e concorde all'asse ed avente l'origine sulla parabola sono diametri della parabola.

Proposizione 2) I punti medi delle corde di una parabola aventi la stessa direzione appartengono ad un diametro della parabola, detto diametro coniugato a tale direzione.

Proposizione 3) Ogni corda AB della parabola $y = ax^2$ è parallela alla tangente nel punto di ascissa uguale alla media aritmetica delle ascisse di A e B.

Dimostrazione.

Sia data la corda di estremi $A(x_A; ax_A^2)$ e $B(x_B; ax_B^2)$, sia $m = \frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}$ il coefficiente angolare della

corda AB sia $r \equiv y = \frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}x + h$ la retta parallela ad AB imponiamo che tale retta sia tangente alla parabola: cioè il discriminante del sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = \frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}x + h \end{cases} \quad \Delta = \left(\frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}\right)^2 + 4ah = 0 \quad \text{da cui } h = -\frac{1}{4a} \left(\frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}\right)^2$$

il punto di tangenza di conseguenza ha l'ascissa soluzione del sistema $\frac{1}{2a} \left(\frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}\right)$,

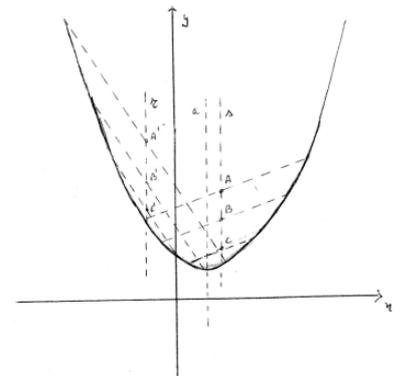


Fig. 5

che scomposto in fattori il numeratore $\frac{1}{2a} \left[\frac{a(x_B - x_A)(x_B + x_A)}{x_B - x_A} \right]$ e semplificato dà come valore $\frac{x_B + x_A}{2}$, che risulta la media aritmetica delle ascisse di A e B.

Proposizione 4) Data la retta tangente alla parabola nel punto P, questa interseca la direttrice nel punto M. L'angolo PFM è retto.

Dimostrazione.

Siano dati l'equazione della parabola $y = ax^2$, il fuoco

$F(0; \frac{1}{4a})$, la direttrice $y = -\frac{1}{4a}$ ed il punto $P(x_p; ax_p^2)$.

La retta tangente in P alla parabola è $y = 2ax_p x - y_p$. Il punto di intersezione M tra la tangente e la direttrice è

dato dalle soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4a} \\ y = 2ax_p x - ax_p^2 \end{cases}$$

$M(\frac{1}{2ax_p}(ax_p^2 - \frac{1}{4a}); -\frac{1}{4a})$

Determiniamo i coefficienti angolari delle rette sostegno di PF e MF: Fig. 6

$$m_{PF} = \frac{ax_p^2 - \frac{1}{4a}}{x_p} = \frac{4a^2x^2 - 1}{4ax_p}; \quad m_{MF} = \frac{-\frac{1}{4a} - \frac{1}{4a}}{\frac{1}{2ax_p}(ax_p^2 - \frac{1}{4a})} = \frac{-4ax_p}{4a^2x_p^2 - 1}$$

Perché le due rette sostegno di PF e di MF siano perpendicolari deve valere la relazione

$$m_{PF} \cdot m_{MF} = -1.$$

Verifichiamo: $\frac{4a^2x^2 - 1}{4ax_p} \cdot \frac{-4ax_p}{4a^2x_p^2 - 1}$, semplificando si ha -1: cioè le rette sostegno sono perpendicolari e quindi l'angolo formato da PF e FM è retto.

Proposizione 5) Una parabola divide il triangolo circoscritto, costruito sulla corda AB con le rette t_A e t_B tangenti alla parabola in A e B, in due parti delle quali una è doppia dell'altra.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione della parabola $y = ax^2$, i punti

$A(x_A; ax_A^2)$ e $B(x_B; ax_B^2)$: estremi della corda AB; siano

$$t_A \equiv y = 2ax_A(x - x_A) + ax_A^2$$

$$t_B \equiv y = 2ax_B(x - x_B) + ax_B^2$$

le rette tangenti rispettivamente in A e in B. Queste si intersecano nel punto C di coordinate, date dalle soluzioni del

$$\text{sistema: } \begin{cases} y = 2ax_A(x - x_A) + ax_A^2 \\ y = 2ax_B(x - x_B) + ax_B^2 \end{cases}$$

$C(\frac{x_B + x_A}{2}; ax_A x_B)$. L'area del triangolo ABC è, note le coordinate dei vertici,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & ax_A^2 & 1 \\ x_B & ax_B^2 & 1 \\ \frac{x_B + x_A}{2} & ax_A x_B & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (x_B - x_A)^3$$

Andiamo alla ricerca del calcolo del segmento parabolico individuato dalla corda AB.

Il punto di tangenza della retta parallela alla corda è $T(\frac{x_B + x_A}{2}; a(\frac{x_B + x_A}{2})^2)$

Pertanto sempre applicando le matrici, l'area del segmento parabolico è

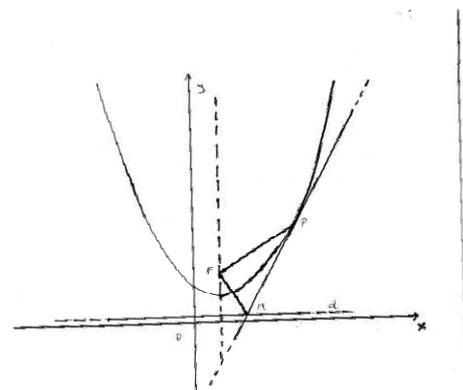


Fig. 6

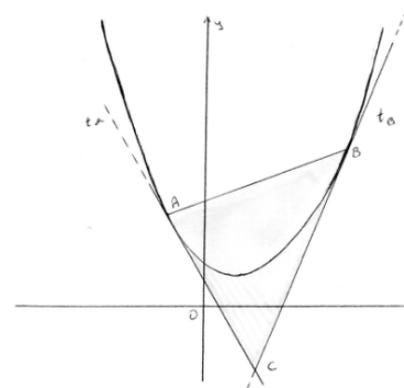


Fig. 7

$$\mathcal{A}_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & ax_A^2 & 1 \\ x_B & ax_B^2 & 1 \\ \frac{x_B+x_A}{2} & a\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \frac{1}{4} (x_B - x_A)^3 = \frac{1}{6} (x_B - x_A)^3$$

L'area del triangolo mistilineo è :

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - \mathcal{A}_1 = \frac{1}{12} (x_B - x_A)^3$$

Da cui $\mathcal{A}_1 = 2 \mathcal{A}_2$ l'asserto: la parabola divide il triangolo circoscritto in due parti di cui una è il doppio dell'altra.

Proposizione 6) Una parabola che interseca l'asse delle ascisse nei punti $(x_1; 0)$ e $(x_2; 0)$ ha equazione $y = a(x-x_1)(x-x_2)$; se $x_1=x_2=\bar{x}$, allora l'equazione diventa $y = a(x-\bar{x})^2$

Analogo ragionamento per quanto riguarda l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse.

Proposizione 7) Una parabola con asse parallelo all'asse y avente vertice in $V(x_0; y_0)$ ha equazione $y-y_0 = a(x-x_0)^2$

Analogamente l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x: $x-x_0 = a(y-y_0)^2$

Proposizione 8) Una parabola con asse parallelo all'asse delle y e tangente nell'origine degli assi O alla retta $y = mx$, ha equazione $y = ax^2 + mx$; nel caso della parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse, l'equazione è $x = ay^2 + \frac{1}{m}y$

Un metodo per trovare l'equazione di una parabola, del tipo $y = ax^2 + bx + c$, passante per tre punti, di cui sono note le loro coordinate, è quello di uguagliare a zero il determinante della matrice d'ordine 4

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Proposizione 9) Due parabole con assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani, sono sovrapponibili se hanno i coefficienti dei termini di 2° grado uguali in valore assoluto.

La dimostrazione consiste nell'applicare ad una delle due parabole una rototraslazione con angolo di 180° nel caso che le due parabole sono con concavità opposta oppure se sono concordi nella concavità basta una semplice traslazione

Ricerca del massimo e del minimo della funzione $y=ax^2 + bx + c$ in un intervallo $[x_0; x_1]$, si determina $\max \{f(x_v), f(x_0), f(x_1)\}$, $\min \{f(x_v), f(x_0), f(x_1)\}$, dove $f(x_v)$ è il valore nel vertice della parabola.

Proposizione 10) Due parabole qualunque $y = a_1x^2$ e $y = a_2x^2$, sono omotetiche di rapporto

$$\text{Costante } k = \left| \frac{a_2}{a_1} \right| = \text{const}$$

La dimostrazione consiste nell'applicare ad una delle due parabole una trasformazione Omotetica di rapporto k e centro O e verificare che si ottiene la seconda parabola

Proposizione 11) Detto C il punto di intersezione delle rette tangenti in due punti distinti A e B di una parabola, la retta congiungente il punto medio M della corda AB con C è parallela all'asse della parabola.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione della parabola $y = ax^2$, i punti $A(x_A; ax_A^2)$ e $B(x_B; ax_B^2)$: estremi della corda AB ; siano

$$t_A \equiv y = 2ax_A(x - x_A) + ax_A^2$$

$$t_B \equiv y = 2ax_B(x - x_B) + ax_B^2$$

le rette tangenti rispettivamente in A e in B . Queste si intersecano nel punto C di coordinate date le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 2ax_A(x - x_A) + ax_A^2 \\ y = 2ax_B(x - x_B) + ax_B^2 \end{cases}$$

$C\left(\frac{x_B+x_A}{2}; ax_Ax_B\right)$. Sia $M\left(\frac{x_B+x_A}{2}; \frac{ax_A^2+ax_B^2}{2}\right)$ il punto medio della corda AB .

Le ascisse di C ed M sono uguali a $\frac{x_B+x_A}{2}$, pertanto si C che M appartengono alla retta $x = \frac{x_B+x_A}{2}$, che manifestamente è una parallela all'asse delle y che risulta in questo contesto l'asse della parabola

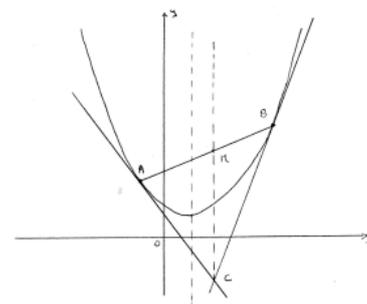


Fig. 7

Proposizione 12) Sia P un punto della direttrice della parabola, le rette tangenti condotte da P alla parabola sono fra loro perpendicolari: ciò definisce la direttrice come l'ortottica della parabola.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione della parabola $y = ax^2$ e l'equazione della direttrice $y = -\frac{1}{4a}$. Sia $P(x_p; -\frac{1}{4a})$ un punto della direttrice. Sia $\Phi_p \equiv y + \frac{1}{4a} = m(x - x_p)$ il fascio di rette passante per P . Determiniamo le due rette del fascio tangenti alla parabola, ponendo a sistema il fascio con l'equazione della parabola ed imponendo che il discriminante del sistema sia uguale a zero:

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y + \frac{1}{4a} = m(x - x_p) \end{cases} \quad \Delta = m^2 - 4a\left(mx_p + \frac{1}{4a}\right) = 0$$

$$m = 2ax_p \pm \sqrt{4a^2x_p^2 + 1}$$

Le due rette tangenti hanno rispettivamente coefficienti angolari:

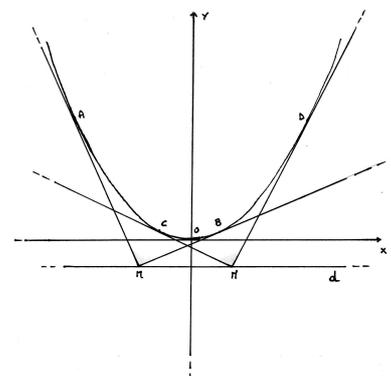


Fig. 8

$$m_1 = 2ax_p - \sqrt{4a^2x_p^2 + 1} \quad \text{e} \quad m_2 = 2ax_p + \sqrt{4a^2x_p^2 + 1}$$

Perché le due rette tangenti siano perpendicolari il prodotto dei loro coefficienti angolari Deve essere -1 : verifichiamo

$$(2ax_p - \sqrt{4a^2x_p^2 + 1})(2ax_p + \sqrt{4a^2x_p^2 + 1}) = 4a^2x_p^2 - (4a^2x_p^2 + 1) = -1$$

Pertanto le due rette tangenti condotte da un punto della direttrice sono perpendicolari.

Proposizione 13) La circonferenza circoscritta al triangolo ABC formato dalle rette tangenti in tre punti M, N, P di una parabola passa per il fuoco della parabola.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione della parabola $y = ax^2$ e i tre punti $M(x_M; ax_M^2)$, $N(x_N; ax_N^2)$, $P(x_p; ax_p^2)$ e le equazioni delle

tre rette tangenti in M, N e P: $t_M \equiv y = 2ax_Mx - ax_M^2$;

$t_N \equiv y = 2ax_Nx - ax_N^2$; $t_P \equiv y = 2ax_px - ax_p^2$.

Queste rette si intersecano a due a due determinando un triangolo di vertici A, B, C, le cui coordinate sono date dalla risoluzione dei tre sistemi:

$$\begin{cases} y = 2ax_Mx - ax_M^2 \\ y = 2ax_Nx - ax_N^2 \end{cases} \quad A\left(\frac{x_M+x_N}{2}; ax_Mx_N\right)$$

$$\begin{cases} y = 2ax_Mx - ax_M^2 \\ y = 2ax_px - ax_p^2 \end{cases} \quad B\left(\frac{x_M+x_p}{2}; ax_Mx_p\right)$$

$$\begin{cases} y = 2ax_px - ax_p^2 \\ y = 2ax_Nx - ax_N^2 \end{cases} \quad C\left(\frac{x_p+x_N}{2}; ax_px_N\right)$$

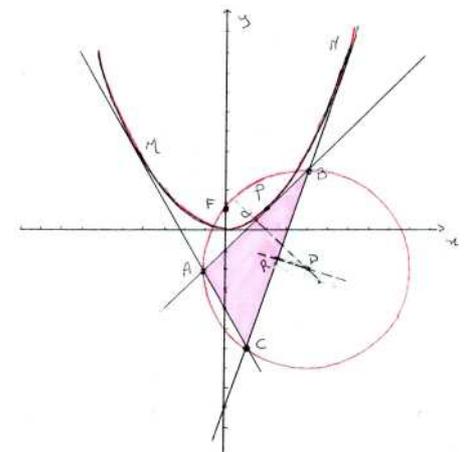


Fig. 9

Determino due assi del triangolo ABC e siano $Q_{AB}\left(\frac{2x_M+x_p+x_N}{4}; \frac{ax_M(x_N+x_p)}{2}\right)$

$R_{BC}\left(\frac{2x_p+x_M+x_N}{4}; \frac{ax_p(x_N+x_M)}{2}\right)$ i punti medi dei lati AB e BC.

L'asse di AB è $s_Q \equiv y = -\frac{1}{2ax_M}x + \frac{2x_M+(x_p+x_N)(1+4a^2x_M^2)}{8ax_M}$

L'asse di BC è $s_R \equiv y = -\frac{1}{2ax_p}x + \frac{2x_p+(x_M+x_N)(1+4a^2x_p^2)}{8ax_p}$

Il centro della circonferenza circoscritta ad ABC è dato dall'intersezione dei due assi:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2ax_M}x + \frac{2x_M+(x_p+x_N)(1+4a^2x_M^2)}{8ax_M} \\ y = -\frac{1}{2ax_p}x + \frac{2x_p+(x_M+x_N)(1+4a^2x_p^2)}{8ax_p} \end{cases}$$

$$D \left(\frac{x_p + x_M + x_N}{4} - a^2 x_M x_N x_p; \frac{1}{8a} + \frac{a}{2} (x_M x_p + x_M x_N + x_N x_p) \right)$$

Perché il punto F sia un punto della circonferenza circoscritta al triangolo ABC è
Necessario che la sua distanza dal centro sia uguale al raggio della circonferenza: cioè
Alla distanza di un vertice del triangolo dal centro della circonferenza stessa.
Verifichiamo se $d(F, D) = d(A, D)$.

$$\begin{aligned} [d(F, D)]^2 &= \left(\frac{x_p + x_M + x_N}{4} - a^2 x_M x_N x_p \right)^2 + \left[\frac{1}{8a} + \frac{a}{2} (x_M x_p + x_M x_N + x_N x_p) - \frac{1}{4a} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{16} (x_M^2 + x_N^2 + x_p^2 + 16a^4 x_M^2 x_N^2 x_p^2 + 2x_M x_N + 2x_M x_p - 8a^2 x_M^2 x_N x_p + \\ &+ 2x_N x_p - 8a^2 x_M x_N^2 x_p - 8a^2 x_M x_N x_p^2) + \frac{1}{64a^2} (16a^4 x_M^2 x_N^2 + 16a^4 x_M^2 x_p^2 + 16a^4 x_N^2 x_p^2 + 1 + \\ &32a^4 x_M^2 x_N x_p + 32a^4 x_N^2 x_M x_p + 32a^4 x_p^2 x_N x_M - 8a^2 x_M x_N - 8a^2 x_M x_p - 8a^2 x_N x_p) = \\ &= \frac{1}{64a^2} (4a^2 x_M^2 + 4a^2 x_N^2 + 4a^2 x_p^2 + 64a^6 x_M^2 x_N^2 x_p^2 + 8a^2 x_M x_N + 8a^2 x_M x_p - 32a^4 x_M^2 x_N x_p + \\ &8a^2 x_N x_p - 32a^4 x_M x_N^2 x_p - 32a^4 x_M x_N x_p^2 + 16a^4 x_M^2 x_N^2 + 16a^4 x_M^2 x_p^2 + 16a^4 x_N^2 x_p^2 + 1 + \\ &32a^4 x_M^2 x_N x_p + 32a^4 x_N^2 x_M x_p + 32a^4 x_p^2 x_N x_M - 8a^2 x_M x_N - 8a^2 x_M x_p - 8a^2 x_N x_p) = \\ &= \frac{1}{64a^2} [4a^2 (x_M^2 + x_N^2 + x_p^2) + 16a^4 (x_M^2 x_N^2 + x_M^2 x_p^2 + x_N^2 x_p^2) + 64a^6 x_M^2 x_N^2 x_p^2 + 1] \\ [d(A, D)]^2 &= \left(\frac{x_p + x_M + x_N}{4} - a^2 x_M x_N x_p - \frac{x_M + x_N}{2} \right)^2 + \left[\frac{1}{8a} + \frac{a}{2} (x_M x_p + x_M x_N + x_N x_p) - a x_M x_N \right]^2 = \\ &= \frac{1}{16} (x_p - x_M - x_N - 4a^2 x_M x_N x_p)^2 + \frac{1}{64a^2} (1 + 4a^2 x_M x_p + 4a^2 x_N x_p - 4a^2 x_M x_N)^2 = \\ &= \frac{1}{16} \left(16a^4 x_M^2 x_N^2 x_p^2 + x_M^2 + x_N^2 + x_p^2 - 8a^2 x_M x_N x_p^2 + 8a^2 x_M^2 x_N x_p + 8a^2 x_M x_N^2 x_p \right) + \\ &\frac{1}{64a^2} (1 + 16a^4 x_M^2 x_p^2 + 16a^4 x_N^2 x_p^2 + 16a^4 x_M^2 x_N^2 + 8a^2 x_M x_p + 8a^2 x_N x_p - 8a^2 x_M x_N + \\ &32a^4 x_M x_N x_p^2 - 32a^4 x_M^2 x_N x_p - 32a^4 x_N^2 x_M x_p) = \\ &= \frac{1}{64a^2} (64a^6 x_M^2 x_N^2 x_p^2 + 4a^2 x_M^2 + 4a^2 x_N^2 + 4a^2 x_p^2 - 32a^4 x_M x_N x_p^2 + 32a^4 x_M^2 x_N x_p + \\ &+ 32a^4 x_M x_N^2 x_p - 8a^2 x_M x_p - 8a^2 x_N x_p + 8a^2 x_M x_N + 1 + 16a^4 x_M^2 x_N^2 + 16a^4 x_M^2 x_p^2 + \\ &16a^4 x_N^2 x_p^2 - 8a^2 x_M x_N + 8a^2 x_M x_p + 8a^2 x_N x_p - 32a^4 x_M^2 x_N x_p - 32a^4 x_N^2 x_M x_p + 32a^4 x_p^2 x_N x_M) \\ &= \frac{1}{64a^2} [4a^2 (x_M^2 + x_N^2 + x_p^2) + 16a^4 (x_M^2 x_N^2 + x_M^2 x_p^2 + x_N^2 x_p^2) + 64a^6 x_M^2 x_N^2 x_p^2 + 1] \end{aligned}$$

Risultando quindi $d(F, D) = d(A, D)$, il punto F appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Proposizione 14) (*Teorema di Cavalieri-Simpson*) Un trapezoide ABCD delimitato dalla parabola $f(x) = y = Ax^2 + Bx + C$, dall'asse delle ascisse e da due rette parallele all'asse y e distanti $2h$, ha area $\mathcal{A} = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$, con $y_0 = f(x_0)$, $y_2 = f(x_2)$ ed $y_1 = f\left(\frac{x_2 + x_0}{2}\right)$ ed $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$

Dimostrazione:

Dalla proprietà “Ogni corda AB della parabola è parallela alla tangente nel punto di ascissa uguale alla media aritmetica delle ascisse di A e B”, sia T il punto di tangenza. Tale punto ha coordinate

$\left(\frac{x_2+x_0}{2}; f\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right)\right)$. Il trapezoide è dato dalla differenza del trapezio rettangolo ABCDE del triangolo mistilineo CTD..

L'area del triangolo mistilineo è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo CTD per il

teorema di Archimede mentre l'area del trapezio ABCD è $\frac{(AD+BC)AB}{2}$.

Siano $A(x_0; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_2; y_2)$, $D(x_0; y_0)$, siano $AB = x_2 - x_0$, $AD = y_0$, $BC = y_2$.

L'area del triangolo CTD è data, applicando le matrici:

$$\mathcal{A}_{CTD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_2+x_0}{2} & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_2 - x_0) \left(y_1 - \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{2} y_2 \right)$$

Mentre quella del trapezio è

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(y_2+y_0)(x_2-x_0)}{2}$$

Sommando, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} (x_2 - x_0) \left(y_1 - \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{2} y_2 \right) \right] + \frac{(y_2+y_0)(x_2-x_0)}{2} = \\ &= (x_2 - x_0) \left[\frac{2}{3} \left(y_1 - \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{2} y_2 \right) + \frac{1}{2} (y_2 + y_0) \right] = \\ &= \frac{(x_2-x_0)}{6} (4y_1 - 2y_0 - 2y_2 + 3y_2 + 3y_0) = \frac{(x_2-x_0)}{6} (4y_1 + y_2 + y_0) \end{aligned}$$

Da cui, posto $2h = (x_2 - x_0)$, si ha

$$\mathcal{A} = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Che è la formula di Cavalieri-Simpson: formula che serve nell'integrazione numerica per approssimare degli integrali finiti

Coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in un suo punto

Sia data l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ e sia P un punto della parabola.

Proposizione 15) Il coefficiente angolare della tangente alla parabola nel punto P è $m = 2ax_p + b$.

Dimostrazione.

Consideriamo il fascio di rette passante per P $(x_p; ax_p^2 + bx_p + c)$:

$$\Phi \equiv y - (ax_p^2 + bx_p + c) = m(x - x_p)$$

Mettiamo a sistema questo fascio con l'equazione della parabola:

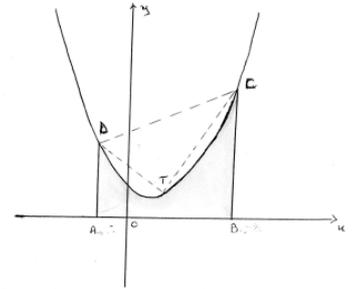


Fig. 10

$$\begin{cases} y - (ax_p^2 + bx_p + c) = m(x - x_p) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Risolviamo, ponendo il determinante uguale a zero:

$$ax^2 + (b - m)x + c + mx_p - ax_p^2 - bx_p - c = 0$$

Elimino i monomi uguali ed opposti :

$$\begin{aligned} ax^2 + (b - m)x + mx_p - ax_p^2 - bx_p &= 0 \\ \Delta = (b - m)^2 - 4a(mx_p - ax_p^2 - bx_p) &= 0 \end{aligned}$$

Operiamo algebricamente

$$\begin{aligned} m^2 - 2bm + b^2 - 4amx_p + 4a^2x_p^2 + 4abx_p &= 0 \\ m^2 - 2m(b + 2ax_p) + b^2 + 4a^2x_p^2 + 4abx_p &= 0 \\ m = b + 2ax_p \pm \sqrt{(b + 2ax_p)^2 - (b^2 + 4a^2x_p^2 + 4abx_p)} \\ m = b + 2ax_p \pm \sqrt{(b + 2ax_p)^2 - (b + 2ax_p)^2} \end{aligned}$$

da cui la formula $m = 2ax_p + b$

Pertanto applicando questo risultato, possiamo determinare l'equazione della retta tangente in P, basti sostituire ad m del fascio Φ il valore trovato

NB Tale punto P ha come ascissa l'ascissa del punto medio di una qualunque corda parallela alla tangente in P.

2 IPERBOLE

-) **Area che sottende l'iperbole equilatera nell'intervallo A'D'** tra il ramo AD e l'asintoto orizzontale (vedi figura 10)

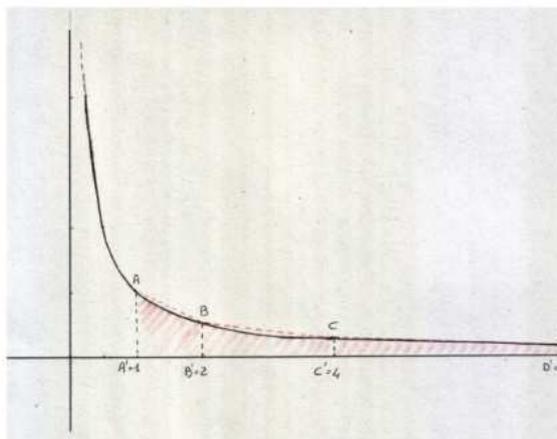


Fig. 11

Fu Gregorio di San Vincenzo (1584 – 1667), gesuita fiammingo, l'aver trovato l'area dell'iperbole equilatera $xy=1$ tra due punti di ascissa assegnati a e b .

Egli aveva mostrato che se lungo l'asse delle x si segnava a partire da $x=a$ una serie di punti in modo tale che gli intervalli compresi fra di essi crescano in proporzione geometrica, e se da questi punti si tracciavano le ordinate all'iperbole $xy=1$ allora le aree delimitate dalla curva e dalle ordinate successive erano uguali. Ossia, con il crescere delle ascisse in proporzione geometrica, l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse cresceva in proporzione aritmetica, per cui deduce $A = \ln b - \ln a$ dove il logaritmo è l'operatore neperiano.

Vediamo un possibile percorso effettuato dall'autore in questione. Egli parte da una constatazione, da lui stesso scoperta che se consideriamo un arco di iperbole, in questo caso AD, e lo proiettiamo sull'asintoto orizzontale otteniamo l'intervallo A'D'; se dividiamo tale intervallo in una sequenza consecutiva di intervalli la cui lunghezza è in progressione geometrica mentre le aree dei trapezi, aventi tali intervalli come altezza e gli altri due vertici giacciono sul ramo di iperbole, si susseguono in progressione aritmetica: qualunque sia la sequenza consecutiva di intervalli.

Pertanto l'area dei pluritrapezi è data da $n-1$ elementi della progressione geometrica per l'area di un trapezio. Verifichiamo con un esempio

Esempio: Nel nostro caso consideriamo l'intervallo $[1 ; 8]$ ed inseriamo due medi geometrici : otteniamo così la progressione geometrica: $1 ; 2 ; 4 ; 8$. Tale sequenza individua tre trapezi di altezza gli intervalli $[1 ; 2]$, $[2 ; 4]$ e $[4 ; 8]$. Tracciate le verticali all'asintoto orizzontale agli estremi di tali intervalli, queste intersecano il ramo di iperbole nei punti di ordinata:

$$1 \rightarrow 1 \qquad 2 \rightarrow \frac{1}{2} \qquad 4 \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$2 \rightarrow \frac{1}{2} \quad 4 \rightarrow \frac{1}{4} \quad 8 \rightarrow \frac{1}{8}$$

Pertanto l'area dei tre trapezi è :

$$A_1 = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(2-1)}{2} = \frac{3}{4} \quad ; \quad A_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)(4-2)}{2} = \frac{3}{4} \quad ; \quad A_3 = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)(8-4)}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{L'area totale } A = 3 A_1 = \frac{9}{4} = 2,25$$

Se adesso inseriamo otto medi geometrici, per una regola delle progressioni geometriche, la ragione della progressione è : $q = \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2}$: otteniamo così la progressione geometrica:

$$1 ; \sqrt[3]{2} ; \sqrt[3]{4} ; 2 ; 2\sqrt[3]{2} ; 2\sqrt[3]{4} ; 4 ; 4\sqrt[3]{2} ; 4\sqrt[3]{4} ; 8$$

I termini della progressione sono 10, pertanto tale sequenza individua 9 trapezi di altezza gli intervalli : $[1 ; \sqrt[3]{2}]$, $[\sqrt[3]{2} ; \sqrt[3]{4}]$, $[\sqrt[3]{4} ; 2]$, $[2 ; 2\sqrt[3]{2}]$, $[2\sqrt[3]{2} ; 2\sqrt[3]{4}]$, $[2\sqrt[3]{4} ; 4]$, $[4 ; 4\sqrt[3]{2}]$, $[4\sqrt[3]{2} ; 4\sqrt[3]{4}]$, $[4\sqrt[3]{4} ; 8]$. Tracciate le verticali all'asintoto orizzontale agli estremi di tali intervalli queste intersecano il ramo di iperbole nei punti di ordinata:

$$1 \rightarrow 1 \quad \sqrt[3]{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \sqrt[3]{4} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

..... e così di seguito

$$\sqrt[3]{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \sqrt[3]{4} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad 2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

Pertanto l'area dei trapezi è

$$A_1 = \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)(\sqrt[3]{2} - 1)}{2} = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2\sqrt[3]{2}} \quad ; \quad A_2 = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{2} = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2\sqrt[3]{2}} \quad ;$$

$$A_3 = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)(2 - \sqrt[3]{4})}{2} = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2\sqrt[3]{2}} \quad ; \dots\dots$$

Anche in questo contesto le aree si susseguono tutte uguali, quindi costituiscono una sequenza in progressione aritmetica

L'area totale è $A = 9 A_1 = 9 \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2\sqrt[3]{2}} = 2,09799$

Possiamo ora iterare il procedimento ed inserire 179 medi geometrici, il numero dei termini della sequenza è 181 e i trapezi sono 180: la ragione di tale progressione è $q = \sqrt[180]{8} = \sqrt[45]{2}$.

L'area del primo trapezio è : $A_1 = \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[60]{2}}\right)(\sqrt[60]{2} - 1)}{2} = \frac{\sqrt[60]{4} - 1}{2\sqrt[60]{2}}$, mentre l'area totale è $A = 180 A_1$:

cioè $A = \frac{\sqrt[60]{4} - 1}{2\sqrt[60]{2}} \cdot 180 = 2,07949$. Osservando i valori si nota che al crescere degli elementi della

sequenza di suddivisioni la spezzata formata dai lati obliqui dei trapezi si va sempre più approssimando alla lunghezza dell'arco e pertanto la somma dei trapezi costituisce l'area che sottende all'arco di iperbole. Tale valore, usando le tavole logaritmiche, è il logaritmo neperiano di 8. Pertanto possiamo affermare che, dato l'intervallo $[1 ; 8]$, l'area dell'arco di iperbole $xy = 1$ è dato da $A = \ln 8 - \ln 1 = \ln 8$.

Vogliamo ora dare una dimostrazione che permette di individuare la formula generale. La dimostrazione oggi fa uso dell'Analisi Matematica e precisamente il calcolo dei limiti. Vogliamo qui proporla.

Ricordiamo un limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, che ci servirà nel finale della dimostrazione.

Sia data l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti: $xy = k$, si vuole determinare l'area sottesa dall'arco di iperbole e l'asse delle ascisse nell'intervallo $AB = [x_A ; x_B]$.

Inseriamo tra i valori estremi di tale intervallo m medi geometrici:

$$x_A, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_B$$

dalla formula delle progressioni geometriche la ragione è $q = \sqrt[m+1]{\frac{x_B}{x_A}}$, pertanto

$$x_1 = x_A \sqrt[m+1]{\frac{x_B}{x_A}}, \quad x_2 = x_A \left(\sqrt[m+1]{\frac{x_B}{x_A}}\right)^2, \quad x_3 = x_A \left(\sqrt[m+1]{\frac{x_B}{x_A}}\right)^3, \dots, \quad x_M = x_A \left(\sqrt[m+1]{\frac{x_B}{x_A}}\right)^m$$

Dal valore di m possiamo individuare il numero di intervalli in cui il segmento AB è diviso : infatti

per $m = 1$ si hanno 2 intervalli $[x_A ; x_1]$ e $[x_1 ; x_B]$

per $m = 2$ si hanno 3 intervalli $[x_A ; x_1], [x_1 ; x_2]$ e $[x_2 ; x_B]$

per $m = 3$ si hanno 4 intervalli $[x_A ; x_1], [x_2 ; x_3], [x_3 ; x_4], [x_4 ; x_B]$

.....

Iterando il procedimento possiamo affermare che per $m = k$ si hanno $k+1$ intervalli.

Se dagli estremi di tali intervalli conduciamo rette parallele all'asse delle ordinate, queste intercettano sull'iperbole un punto di ordinata $y_m = \frac{k}{x_m}$, la figura determinata dai segmenti

di estremi le ascisse x_{m-1} e x_m , dai segmenti paralleli rispettivamente di estremi x_{m-1} , $\frac{k}{x_{m-1}}$ e x_m , $\frac{k}{x_m}$ e dalla corda dell'arco di iperbole compresa in tale intervallo, costituisce un trapezio di basi $[x_{m-1}, \frac{k}{x_{m-1}}]$ e $[x_m, \frac{k}{x_m}]$ e di altezza il segmento $[x_{m-1}; x_m]$. Sommando le aree di tutti i trapezi relativi ai singoli intervalli si ha un'area che risulta maggiorante dell'area che sottende l'arco di iperbole. Ma al crescere di m il numero di intervalli va sempre più crescendo e la corda che costituisce il lato obliquo del generico trapezio va sempre più approssimandosi all'arco, quando m tende all'infinito la corda si approssima ad un punto e quindi corda ed arco nei vari intervalli coincidono e la sommatoria delle aree dei trapezi coincide con l'area che sottende l'arco di iperbole. Calcoliamo le aree di detti trapezi:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{x_A} + \frac{k}{x_A^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}}} \right) \left(x_A^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - x_A \right) = \frac{1}{2} \frac{x_A k}{x_A^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}}} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} + 1 \right) \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - 1 \right) = \\ &= \frac{k}{2} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - m+1 \sqrt{\frac{x_A}{x_B}} \right) = \frac{k}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^2} + \frac{k}{x_A^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}}} \right) \left(x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^2 - x_A^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_A k^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}}}{x_A^{m+1} \sqrt{\frac{x_B}{x_A}}} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} + 1 \right) \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - 1 \right) = \frac{k}{2} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - m+1 \sqrt{\frac{x_A}{x_B}} \right) = \frac{k}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^{m+1}} + \frac{k}{x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^m} \right) \left(x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^{m+1} - x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^m \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_A k \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^m}{x_A \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} \right)^m} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} + 1 \right) \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - 1 \right) = \frac{k}{2} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - m+1 \sqrt{\frac{x_A}{x_B}} \right) = \frac{k}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) \end{aligned}$$

Come è possibile constatare tutte le aree sono uguali a $\frac{k}{2} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - m+1 \sqrt{\frac{x_A}{x_B}} \right)$ oppure a $\frac{k}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right)$

Pertanto l'area totale è

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = (m+1) \frac{k}{2} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - m+1 \sqrt{\frac{x_A}{x_B}} \right) = (m+1) \frac{k}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right)$$

L'area che sottende l'arco di iperbole nell'intervallo $[x_A; x_B]$ è

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \frac{k}{2} \left(m+1 \sqrt{\frac{x_B}{x_A}} - m+1 \sqrt{\frac{x_A}{x_B}} \right) = k (\ln x_B - \ln x_A)$$

Infatti posto $y_1 = (m+1) \frac{k}{2} \frac{m+1}{\sqrt{x_A}} \sqrt{x_B}$ e $y_2 = (m+1) \frac{k}{2} \frac{m+1}{\sqrt{x_B}} \sqrt{x_A}$

Trasformo in forma esponenziale, appoggiandomi ai logaritmi:

$$y_1 = e^{\ln(m+1)} \cdot e^{\ln k - \ln 2} \cdot e^{\frac{1}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)}$$

$$y_2 = e^{\ln(m+1)} \cdot e^{\ln k - \ln 2} \cdot e^{\frac{1}{m+1}(\ln x_A - \ln x_B)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \frac{k}{2} \left(\frac{m+1}{\sqrt{x_A}} \sqrt{x_B} - \frac{m+1}{\sqrt{x_B}} \sqrt{x_A} \right) &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[e^{\ln(m+1)} \cdot e^{\ln k - \ln 2} \left(e^{\frac{1}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)} - e^{\frac{1}{m+1}(\ln x_A - \ln x_B)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)} - 1}{\frac{1}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)} (m+1) \frac{k}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k \frac{2}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)}{2 \frac{1}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)} \frac{e^{\frac{2}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)} - 1}{\frac{2}{m+1}(\ln x_B - \ln x_A)} (m+1) = \\ &= k (\ln x_B - \ln x_A) \end{aligned}$$

Gregorio di San Vincenzo (1584 – 1667), usando il calcolo coi logaritmi, che era stato da poco scoperto da Nepero, ed il calcolo mediante il metodo di esaustione di Archimede, che per i matematici del cinquecento era un terreno alquanto fertile di scoperte nel campo delle aree di figure curvilinee, riesce a determinare la formula risolvete.

-) Proprietà generali sull'iperbole

Proposizione 16) La retta tangente ad un'iperbole in un suo punto P taglia gli asintoti in due punti equidistanti da P.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto

$P(x_p; y_p)$: $\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$: cioè $b^2 x_p^2 - a^2 y_p^2 = a^2 b^2$.

Le equazioni degli asintoti sono $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, mentre

l'equazione della retta tangente in P all'iperbole è $\frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1$

I punti di intersezione della tangente con gli asintoti sono dati risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \end{cases} \quad A \left(\frac{a^2 b}{x_p b - y_p a}; \frac{ab^2}{x_p b - y_p a} \right)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \end{cases} \quad B \left(\frac{a^2 b}{x_p b + y_p a}; -\frac{ab^2}{x_p b + y_p a} \right)$$

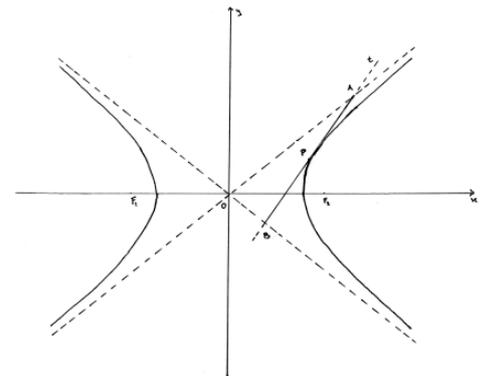


Fig. 12

Perché i punti A e B siano equidistanti da P è necessario che P sia punto medio del segmento di estremi A e B: le coordinate del punto medio di A e B sono

$$x_M = \frac{\frac{a^2 b}{x_p b - y_p a} + \frac{a^2 b}{x_p b + y_p a}}{2} = \frac{a^2 b (x_p b + y_p a + x_p b - y_p a)}{2(x_p b - y_p a)(x_p b + y_p a)} = \frac{2a^2 b^2 x_p}{2(b^2 x_p^2 - a^2 y_p^2)} = \frac{2a^2 b^2 x_p}{2a^2 b^2} = x_p$$

$$y_M = \frac{\frac{ab^2}{x_p b - y_p a} - \frac{ab^2}{x_p b + y_p a}}{2} = \frac{ab^2 (x_p b + y_p a - x_p b + y_p a)}{2(x_p b - y_p a)(x_p b + y_p a)} = \frac{2a^2 b^2 y_p}{2(b^2 x_p^2 - a^2 y_p^2)} = \frac{2a^2 b^2 y_p}{2a^2 b^2} = y_p$$

Le coordinate del punto medio coincidono con le coordinate del punto P quindi i punti A e B sono equidistanti da P.

Proposizione 17) Sia P un punto dell'iperbole e C il suo centro, qualsiasi corda QQ' parallela a CP incontra gli asintoti nei punti K e K' tale che $QK = Q'K'$ e $QK \cdot Q'K' = CP^2$.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto $P(x_p; y_p)$: $\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$ Le coordinate del centro sono $C(0; 0)$ e le equazioni degli asintoti sono $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, mentre l'equazione della retta CP è $y = \frac{y_p}{x_p}x$.

La corda QQ' parallela a CP ha equazione $y = \frac{y_p}{x_p}x + q$.

Posto $m = \frac{y_p}{x_p}$, i punti di intersezione di questa retta con l'iperbole sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2 x^2 + 2mqx + q^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b^2 - a^2 m^2)x^2 - 2a^2 m q x - a^2 q^2 - a^2 b^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{a^2 m q \pm \sqrt{a^4 m^2 q^2 + a^2 (q^2 + b^2)(b^2 - a^2 m^2)}}{(b^2 - a^2 m^2)} = \frac{a^2 m q \pm ab \sqrt{q^2 + b^2 - a^2 m^2}}{(b^2 - a^2 m^2)}$$

$$y_{1,2} = \frac{a^2 m^2 q \pm m \sqrt{a^4 m^2 q^2 + a^2 (q^2 + b^2)(b^2 - a^2 m^2)}}{(b^2 - a^2 m^2)} + q = \frac{q b^2 \pm m a b \sqrt{q^2 + b^2 - a^2 m^2}}{(b^2 - a^2 m^2)}$$

$$Q \left(\frac{a^2 m q + ab \sqrt{q^2 + b^2 - a^2 m^2}}{(b^2 - a^2 m^2)} ; \frac{q b^2 + m a b \sqrt{q^2 + b^2 - a^2 m^2}}{(b^2 - a^2 m^2)} \right)$$

$$Q' \left(\frac{a^2 m q - ab \sqrt{q^2 + b^2 - a^2 m^2}}{(b^2 - a^2 m^2)} ; \frac{q b^2 - m a b \sqrt{q^2 + b^2 - a^2 m^2}}{(b^2 - a^2 m^2)} \right)$$

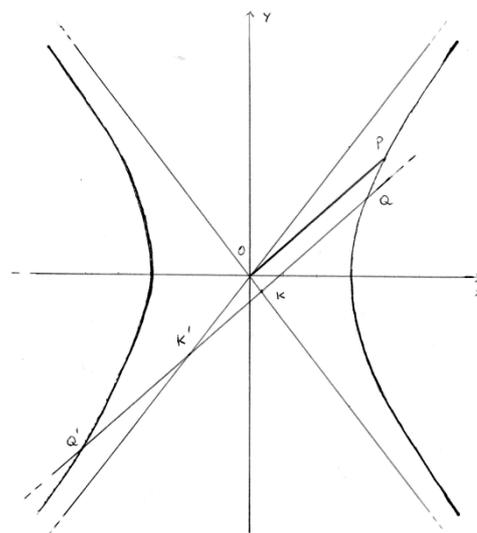


Fig. 13

I punti di intersezione di questa retta con gli asintoti sono dati risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = mx + q \end{cases} \quad K' \left(\frac{qa}{b-am}; \frac{qb}{b-am} \right)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ y = mx + q \end{cases} \quad K \left(-\frac{qa}{b+am}; \frac{qb}{b+am} \right)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} d(Q, K) &= \sqrt{\left(\frac{a^2mq + ab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} + \frac{qa}{b+am} \right)^2 + \left(\frac{qb^2 + mab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} - \frac{qb}{b+am} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{abq + ab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \right)^2 + \left(\frac{abqm + mab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2(q + \sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2})^2(1+m^2)}{(b^2 - a^2m^2)^2}} = \\ &= \frac{ab(q + \sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2})\sqrt{1+m^2}}{b^2 - a^2m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(Q', K') &= \sqrt{\left(\frac{a^2mq - ab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} - \frac{qa}{b-am} \right)^2 + \left(\frac{qb^2 - mab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} - \frac{qb}{b-am} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{-abq - ab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \right)^2 + \left(\frac{-abqm - mab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2(q + \sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2})^2(1+m^2)}{(b^2 - a^2m^2)^2}} = \\ &= \frac{ab(q + \sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2})\sqrt{1+m^2}}{b^2 - a^2m^2} \end{aligned}$$

Da cui $QK = Q'K'$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} d(Q, K') &= \sqrt{\left(\frac{a^2mq + ab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} - \frac{qa}{b-am} \right)^2 + \left(\frac{qb^2 + mab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} - \frac{qb}{b-am} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{-abq + ab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \right)^2 + \left(\frac{-abqm + mab\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2(\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2} - q)^2(1+m^2)}{(b^2 - a^2m^2)^2}} = \\ &= \frac{ab(\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2} - q)\sqrt{1+m^2}}{b^2 - a^2m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ora } QK \cdot QK' &= \frac{ab(q + \sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2})\sqrt{1+m^2}}{b^2 - a^2m^2} \cdot \frac{ab(\sqrt{q^2 + b^2 - a^2m^2} - q)\sqrt{1+m^2}}{b^2 - a^2m^2} = \\
&= \frac{a^2b^2(q^2 + b^2 - a^2m^2 - q^2)(1+m^2)}{(b^2 - a^2m^2)^2} = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2 - a^2m^2} = \frac{a^2b^2\left(1 + \frac{y_p^2}{x_p^2}\right)}{b^2 - a^2\frac{y_p^2}{x_p^2}} = \frac{a^2b^2\frac{x_p^2 + y_p^2}{x_p^2}}{\frac{b^2x_p^2 - a^2y_p^2}{x_p^2}} = \\
&= \frac{a^2b^2\frac{x_p^2 + y_p^2}{x_p^2}}{\frac{a^2b^2}{x_p^2}} = x_p^2 + y_p^2 = CP^2
\end{aligned}$$

Da questa proposizione 17) discendono due corollari:

Corollario 1) Se la retta r interseca in A e B un'iperbole e in C e D gli asintoti (con C più vicino ad A), allora risulta $AC = BD$; e, i segmenti AB e CD ammettono lo stesso punto medio

Corollario 2) Il punto di contatto di una tangente con l'iperbole è il punto medio del segmento staccato sulla tangente dagli asintoti.

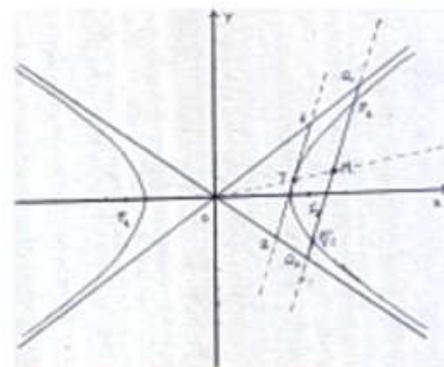


Fig. 14

Proposizione 18) In ogni iperbole la differenza dei quadrati costruiti su due diametri coniugati qualsiasi è uguale alla differenza dei quadrati costruiti sugli assi.

Dimostrazione:

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e due suoi diametri

coniugati: $s_1 \equiv y = mx$ ed $s_2 \equiv y = \frac{b^2}{a^2m}x$; siano C, E e D, F

rispettivamente i punti di intersezione di s_1 e di s_2 con l'iperbole, le cui coordinate sono date dalle soluzioni dei due seguenti sistemi;

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \\ y_{1,2} = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \end{cases} \quad \text{con } b^2 - a^2m^2 > 0$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \frac{b^2}{a^2m}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^4m^2} = 1 \\ y = \frac{b^2}{a^2m}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{a^2m}{\sqrt{-a^2m^2 + b^2}} \\ y_{1,2} = \pm \frac{b^2}{\sqrt{-a^2m^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$C \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} ; \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \right) , E \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} ; -\frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \right)$$

$$D \left(\frac{a^2m}{\sqrt{-a^2m^2 + b^2}} ; \frac{b^2}{\sqrt{-a^2m^2 + b^2}} \right) , F \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{-a^2m^2 + b^2}} ; -\frac{b^2}{\sqrt{-a^2m^2 + b^2}} \right)$$

$$CE^2 = \frac{4a^2b^2}{b^2 - a^2m^2} + \frac{4a^2b^2m^2}{b^2 - a^2m^2} ; DF^2 = \frac{4a^4m^2}{b^2 - a^2m^2} + \frac{4b^4}{b^2 - a^2m^2}$$

$$|CE^2 - DF^2| = \left| \frac{4a^2b^2}{b^2 - a^2m^2} + \frac{4a^2b^2m^2}{b^2 - a^2m^2} - \frac{4a^4m^2}{b^2 - a^2m^2} - \frac{4b^4}{b^2 - a^2m^2} \right| = \left| \frac{4a^2(b^2 - a^2m^2) - 4b^2(b^2 - a^2m^2)}{b^2 - a^2m^2} \right| =$$

$$= |4a^2 - 4b^2|$$

Proposizione 19) I punti medi delle corde di un'iperbole parallele ad un suo diametro appartengono al suo diametro coniugato.

Dimostrazione

Data l'equazione dell'iperbole canonica nella forma implicita :

$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, la ricerca dei diametri coniugati viene determinata risolvendo $-a^2m \cdot m' + b^2 = 0$. Pertanto posto $y = mx$ un diametro dell'iperbole il coefficiente m' del suo coniugato è $m' = \frac{b^2}{a^2m}$, quindi $y = \frac{b^2}{a^2m}x$ è l'equazione del diametro coniugato. Consideriamo una corda parallela al diametro $y = mx$, essa appartiene alla retta parallela al diametro stesso : $y = mx + h$. Intersechiamo tale retta con l'ellisse e troviamo le coordinate degli estremi A e B della corda:

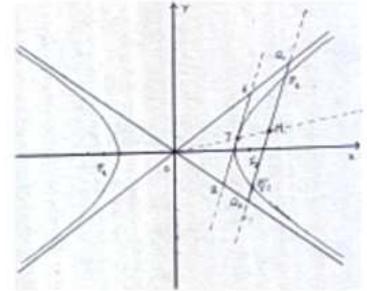


fig. 15

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2hmx - a^2h^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2hmx - a^2h^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{a^2hm \pm \sqrt{a^4h^2m^2 + a^2b^2h^2 + a^2b^4 - a^4b^2h^2 - a^4b^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \\ y = mx + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{a^2hm \pm ab\sqrt{b^2 + h^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \\ y_{1,2} = \frac{a^2hm^2 \pm mab\sqrt{b^2 + h^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} + h \end{cases}$$

$$A \left(\frac{a^2hm + ab\sqrt{b^2 + h^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} ; \frac{a^2hm^2 + mab\sqrt{b^2 + h^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} + h \right)$$

$$B \left(\frac{a^2hm - ab\sqrt{b^2 + h^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} ; \frac{a^2hm^2 - mab\sqrt{b^2 + h^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} + h \right)$$

Il punto medio della corda AB ha coordinate: $M_{AB} \left(\frac{a^2hm}{b^2 - a^2m^2} ; \frac{b^2h}{b^2 - a^2m^2} \right)$

Verifichiamo che tale punto appartiene al diametro coniugato

$$\frac{b^2h}{b^2 - a^2m^2} = \frac{b^2}{a^2m} \left(\frac{a^2hm}{b^2 - a^2m^2} \right)$$

Al secondo membro semplificando si ha l'identità:

$$\frac{b^2h}{b^2 - a^2m^2} = \frac{b^2h}{b^2 - a^2m^2}$$

Al variare di h si trovano tutte le corde parallele al diametro di coefficiente angolare m . Quindi tutti i punti medi al variare di h appartengono al diametro coniugato di $y = mx$.

Proposizione 20) Sia Q il punto di intersezione della retta tangente in P all'iperbole con l'asse focale, sia H la proiezione di P sull'asse focale ed O il centro dell'iperbole. Nel triangolo PQO vale la seguente relazione: $OQ \cdot OH = OA^2$, dove OA è la misura del semiasse trasverso

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto $P(x_p; y_p)$: $\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$: cioè $b^2x_p^2 - a^2y_p^2 = a^2b^2$. Le coordinate del centro sono $O(0; 0)$, l'equazione della retta tangente in P: $\frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1$; e le coordinate del vertice sono $A(a; 0)$. Le coordinate del punto Q sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad Q\left(\frac{a^2}{x_p}; 0\right)$$

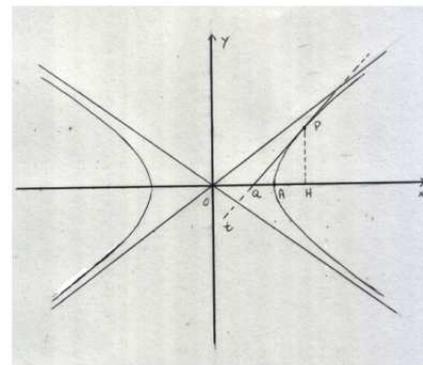


Fig. 16

Le coordinate del punto H proiezione di P sull'asse focale sono $H(x_p; 0)$.

La misura di $OQ = \left| \frac{a^2}{x_p} \right|$ e la misura di $OH = |x_p|$, mentre quella di $OA = |a|$.

Verifichiamo la relazione $OQ \cdot OH = \left| \frac{a^2}{x_p} \right| \cdot |x_p| = |a^2| = a^2 = (|a|)^2 = OA^2$, pertanto

$$OQ \cdot OH = OA^2$$

Proposizione 21) (Teorema di Apollonio): L'area del triangolo, delimitato dal centro dell'iperbole e dai punti di intersezione della tangente all'iperbole in un suo punto con gli asintoti, è uguale al prodotto dei semiasse.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto $P(x_p; y_p)$: $\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$ cioè $b^2x_p^2 - a^2y_p^2 = a^2b^2$. Le equazioni degli asintoti sono $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, mentre l'equazione della retta tangente in P all'iperbole è $\frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1$, le coordinate del centro sono $O(0; 0)$. I punti di intersezione della tangente con gli asintoti sono dati risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \end{cases} \quad A\left(\frac{a^2b}{x_pb - y_pa}; \frac{ab^2}{x_pb - y_pa}\right)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \end{cases} \quad B\left(\frac{a^2b}{x_pb + y_pa}; -\frac{ab^2}{x_pb + y_pa}\right)$$

L'area del triangolo AOB è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{a^2 b}{x_p b - y_p a} & \frac{ab^2}{x_p b - y_p a} & 1 \\ \frac{a^2 b}{x_p b + y_p a} & -\frac{ab^2}{x_p b + y_p a} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| -\frac{a^3 b^3}{x_p^2 b^2 - y_p^2 a^2} - \frac{a^3 b^3}{x_p^2 b^2 - y_p^2 a^2} \right| = \frac{a^3 b^3}{x_p^2 b^2 - y_p^2 a^2} = \frac{a^3 b^3}{a^2 b^2} = ab$$

che risulta equivalente al rettangolo di lati i semiassi dell'iperbole.

Proposizione 22) Data la retta tangente all'iperbole nel punto P, questa interseca le direttrici, relative ai fuochi F_1 ed F_2 , rispettivamente nei punti M ed N. Gli angoli PF_1M e PF_2N sono retti.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto $P(x_p; y_p)$: $\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$: cioè $b^2 x_p^2 - a^2 y_p^2 = a^2 b^2$.

Le coordinate dei fuochi sono: $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$ e le equazioni delle direttrici sono $d_1: x = -\frac{a^2}{c}$ e $d_2: x = \frac{a^2}{c}$ mentre l'equazione della retta tangente in P all'iperbole è $\frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1$. Le coordinate dei punti di intersezione della retta tangente con le direttrici sono date dalle soluzioni dei sistemi:

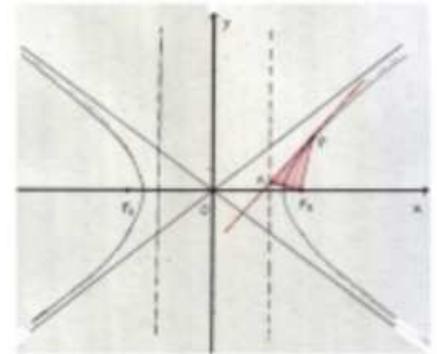


Fig. 17

$$\begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ x = -\frac{a^2}{c} \end{cases} \quad M\left(-\frac{a^2}{c}; -\frac{b^2}{y_p} - \frac{x_p b^2}{c y_p}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ x = \frac{a^2}{c} \end{cases} \quad N\left(\frac{a^2}{c}; -\frac{b^2}{y_p} + \frac{x_p b^2}{c y_p}\right)$$

Perché l'angolo PF_1M sia retto i coefficienti angolari delle rette sostegno di PF_1 e F_1M Devono essere l'uno l'opposto del reciproco dell'altro: cioè il loro prodotto è uguale a -1 Verifichiamo

$$m_{PF_1} = \frac{y_p}{x_p + c} \quad ; \quad m_{MF_1} = \frac{-\frac{b^2}{y_p} - \frac{x_p b^2}{c y_p}}{-\frac{a^2}{c} + c} = -\frac{cb^2 + x_p b^2}{(c^2 - a^2)y_p} \quad ;$$

$$m_{PF_1} \cdot m_{MF_1} = \frac{y_p}{x_p + c} \cdot \left[-\frac{cb^2 + x_p b^2}{(c^2 - a^2)y_p}\right] = \frac{y_p}{x_p + c} \cdot \left[\frac{b^2(x_p + c)}{b^2 y_p}\right] = -1$$

Quindi i due coefficienti angolari sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro e pertanto le due rette PF_1 ed F_1M sono perpendicolari.

Proposizione 8) Le iperboli equilateri sono simili, cioè detti P_1 e P_2 i punti di intersezione di una retta per l'origine $y = mx$ con due iperboli equilateri $xy = k_1$ e $xy = k_2$ risulta indipen-

dente da m il rapporto $\frac{OP_1}{OP_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$

Proposizione 23) In ogni iperbole la differenza dei quadrati costruiti su due diametri coniugati qualsiasi è uguale alla differenza dei quadrati costruiti sugli assi.

Proposizione 24) Se tracciano le tangenti agli estremi di una coppia di diametri coniugati di un'iperbole il parallelogrammo formato da queste quattro tangenti sarà equivalente al rettangolo costruito sugli assi

Proposizione 25) Ogni corda AB dell'iperbole equilatera $y = \frac{k}{x}$ è parallela alla tangente nel punto di ascissa uguale alla media geometrica delle ascisse di A e B

Dimostrazione

Siano date le coordinate dei punti A $(x_A; \frac{k}{x_A})$ e B $(x_B; \frac{k}{x_B})$, la retta passante per A e B è

$$\text{data da } t_{AB} \equiv \frac{y - \frac{k}{x_B}}{\frac{k}{x_A} - \frac{k}{x_B}} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B} \quad \text{da cui} \quad y = -\frac{k}{x_A x_B} x + \frac{k(x_B + x_A)}{x_A x_B}.$$

Le coordinate del punto di tangenza sono $T(\sqrt{x_A x_B}; \frac{k}{\sqrt{x_A x_B}})$. Calcoliamo la retta tangente col metodo dello sdoppiamento:

$$t_T \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\sqrt{x_A x_B}} x + y \sqrt{x_A x_B} \right) = k$$

$$\text{da cui} \quad t_T \equiv y = -\frac{k}{x_A x_B} x + \frac{k}{\sqrt{x_A x_B}}$$

Le due rette t_{AB} e t_T , ammettendo lo stesso coefficiente angolare sono parallele.

Proposizione 26) I parallelogrammi individuati dagli asintoti e dalle rette parallele ad essi condotte da un punto P dell'iperbole sono equivalenti

Dimostrazione.

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, un suo

punto P $(x_p; y_p)$ con $\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$ o $b^2 x_p^2 - a^2 y_p^2 = a^2 b^2$,

e le equazioni degli asintoti $t_1 \equiv y = -\frac{b}{a}x$ e $t_2 \equiv y = \frac{b}{a}x$.

Le rette parallele agli asintoti, passanti per P sono

$$r_1 \equiv y = -\frac{b}{a}x + \frac{bx_p + ay_p}{a} \quad \text{e} \quad r_2 \equiv y = \frac{b}{a}x - \frac{bx_p - ay_p}{a}$$

Sia A il punto di intersezione di t_2 con r_1 :

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{b}{a}x + \frac{bx_p + ay_p}{a} \end{cases} \quad A \left(\frac{bx_p + ay_p}{2b}; \frac{bx_p + ay_p}{2a} \right)$$

L'area di un generico parallelogrammo è data due volte l'area del triangolo OAP:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} \frac{bx_p + ay_p}{2b} & \frac{bx_p + ay_p}{2a} & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \frac{bx_p y_p + ay_p^2}{2b} - \frac{bx_p^2 + ax_p y_p}{2a} \right| = \\ &= \left| \frac{abx_p y_p + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2 - abx_p y_p}{2ab} \right| = \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

Poiché l'area non dipende dalle coordinate di P ma solo dai semiassi dell'iperbole, tutti i

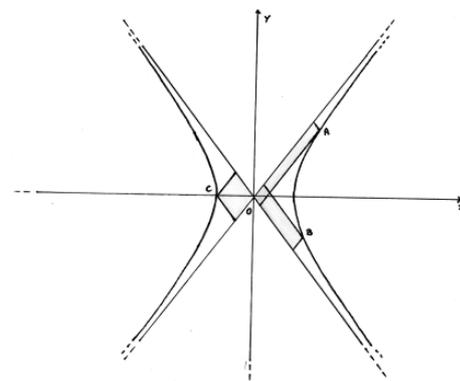


Fig. 18

Parallelogrammi, qualunque sia P, ammettendo la stessa area sono equivalenti

Corollario: I rettangoli individuati dagli asintoti e dalle rette parallele ad essi condotte da un punto P dell'iperbole sono equivalenti e la loro area è $\frac{a^2}{2}$ nel caso che l'equazione dell'iperbole equilatera è $x^2 + y^2 = a^2$ mentre è k se l'equazione è $xy = k$.

Proposizione 27) La tangente ad un'iperbole in un suo punto qualsiasi P è la bisettrice dell'angolo interno al triangolo F_1PF_2 , mentre la normale è la bisettrice dell'angolo esterno al triangolo F_1PF_2 .

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'iperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto P $(x_p ; y_p) : \frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$ cioè $b^2x_p^2 - a^2y_p^2 = a^2b^2$. Le coordinate dei fuochi sono : $F_1 (-c ; 0)$ e $F_2 (c ; 0)$ e l'equazione della retta t tangente in P all'iperbole è $\frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1$. Supponiamo, senza ledere la generalità del punto P, che il punto P cada nel primo quadrante. Sia F'_2 il punto simmetrico del punto F_2 rispetto alla tangente in P, se F'_2 cade sul segmento F_1P , allora, essendo il triangolo F'_2PF_2 isoscele sulla base F'_2F_2 ed essendo la tangente in P asse di simmetria è anche bisettrice dell'angolo F'_2PF_2 , ma se F'_2 cade sul segmento F_1P , allora l'angolo F_1PF_2 è diviso dalla tangente in due parti congruenti e quindi la tangente all'iperbole nel punto P è bisettrice dell'angolo F_1PF_2 . Non ci resta che verificare se F'_2 cade sul segmento F_1P .

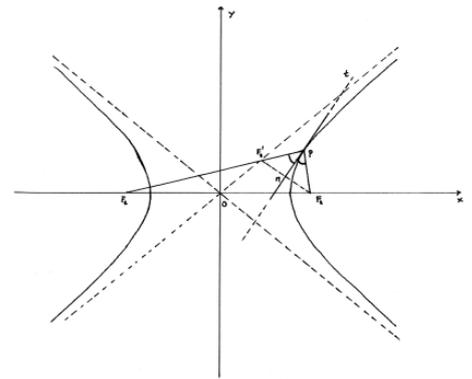


Fig. 19

Sia $r \equiv \frac{y_p}{b^2}x + \frac{x_p}{a^2}y = \frac{cy_p}{b^2}$ la retta perpendicolare a t passante per F_2 , sia M il punto di intersezione di r con t :

$$\begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ \frac{y_p}{b^2}x + \frac{x_p}{a^2}y = \frac{cy_p}{b^2} \end{cases} \quad \text{applicando la regola di Cramer calcoliamo le soluzioni}$$

$$x_M = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{y_p}{b^2} \\ \frac{cy_p}{b^2} & \frac{x_p}{a^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x_p}{a^2} & -\frac{y_p}{b^2} \\ \frac{y_p}{b^2} & \frac{x_p}{a^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{x_p}{a^2} + \frac{y_p cy_p}{b^4}}{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}} = \frac{a^2 b^4 x_p + a^4 c y_p^2}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2} ; \quad y_M = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x_p}{a^2} & 1 \\ \frac{y_p}{b^2} & \frac{cy_p}{b^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x_p}{a^2} & -\frac{y_p}{b^2} \\ \frac{y_p}{b^2} & \frac{x_p}{a^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{cx_p y_p}{a^2 b^2} - \frac{y_p}{b^2}}{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}} = \frac{a^2 b^2 c x_p y_p - a^4 b^2 y_p}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2}$$

Applicando la simmetria per punti, le coordinate di F'_2 sono

$$x' = 2 \cdot \frac{a^2 b^4 x_p + a^4 c y_p^2}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2} - c = \frac{2a^2 b^4 x_p + a^4 c y_p - b^4 c x_p^2}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2} ; \quad y' = \frac{2a^2 b^2 c x_p y_p - 2 a^4 b^2 y_p}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2}$$

$$F'_2 \left(\frac{2a^2 b^4 x_p + a^4 c y_p - b^4 c x_p^2}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2} ; \frac{2a^2 b^2 c x_p y_p - 2 a^4 b^2 y_p}{b^4 x_p^2 + a^4 y_p^2} \right)$$

Verifichiamo la formula dell'allineamento di tre punti:

$$\frac{\frac{2a^2b^2cx_p y_p - 2a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} - 0}{y_p - 0} = \frac{\frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p - b^4cx_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} + c}{x_p + c}$$

$$\frac{2a^2b^2cx_p - 2a^4b^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} = \frac{\frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p - b^4cx_p^2 + b^4cx_p^2 + a^4cy_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}}{x_p + c} = \frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p + a^4cy_p}{(x_p + c)(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)} =$$

$$= \frac{2a^2b^2(cx_p - a^2)(x_p + c)}{(x_p + c)(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)} = \frac{2a^2b^2cx_p - 2a^4b^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}$$

Otteniamo un'identità e l'allineamento dei punti è verificato, quindi F_2' appartiene al segmento F_1P

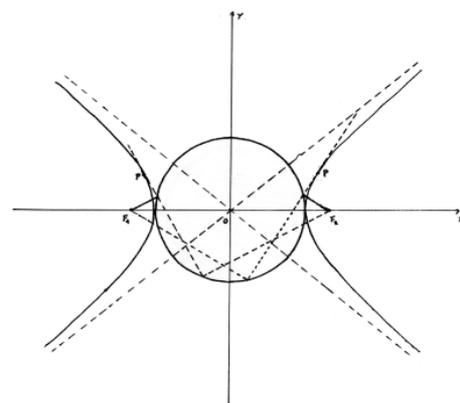
Quindi è dimostrato che la tangente in un punto all'iperbole è la bisettrice dell'angolo interno al triangolo F_1PF_2 e di conseguenza la bisettrice dell'angolo esterno a F_1PF_2 , suo supplementare è la perpendicolare alla tangente e risulta la normale all'iperbole in P.

Corollario : -) La podaria del fuoco F_2 rispetto all'iperbole: cioè il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da F_2 alle tangenti, è la circonferenza di centro O e raggio uguale al semiasse trasverso dell'iperbole.

Dimostrazione

Il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da F_2 alle tangenti, espressa in equazioni parametriche è dato dal sistema seguente

$$\begin{cases} x = \frac{a^2b^4x_p + a^4cy_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} \\ y = \frac{a^2b^2cx_p y_p - a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} \end{cases}$$



Vogliamo verificare che tale luogo coincide con la circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$. Fig.21

Andiamo a sostituire i valori di x e di y nell'equazione canonica della circonferenza e verifichiamo se l'equazione diviene un'identità, in tal caso il luogo è proprio quella circonferenza.

$$\left(\frac{a^2b^4x_p + a^4cy_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2cx_p y_p - a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{a^4b^8x_p^2 + 2a^6b^4cx_p y_p^2 + a^8c^2y_p^4 + a^4b^4c^2x_p^2 y_p^2 - 2a^6b^4cx_p y_p^2 + a^8b^4y_p^2}{(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)^2} = a^2$$

$$\frac{a^4b^4(b^4x_p^2 + a^4y_p^2) + a^4c^2y_p^2(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)}{(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)^2} = a^2$$

$$\frac{a^4(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)(b^4 + c^2y_p^2)}{(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)^2} = a^2$$

Semplificando e sostituendo a $c^2 = a^2 + b^2$ e $y_p^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_p^2 - a^2)$, otteniamo:

$$\frac{a^4 \left[b^4 + (a^2 + b^2) \frac{b^2}{a^2} (x_p^2 - a^2) \right]}{b^4x_p^2 + a^4 \frac{b^2}{a^2} (x_p^2 - a^2)} = a^2$$

$$\frac{a^2(a^2b^4 + a^2b^2x_p^2 - a^4b^2 + b^4x_p^2 - a^2b^4)}{b^4x_p^2 + a^2b^2x_p^2 - a^4b^2} = a^2$$

$$\frac{a^2(b^4x_p^2 + a^2b^2x_p^2 - a^4b^2)}{b^4x_p^2 + a^2b^2x_p^2 - a^4b^2} = a^2$$

$$a^2 = a^2$$

L'equazione è diventata un'identità qualunque siano i valori di x_p ed y_p , pertanto il luogo è proprio la circonferenza canonica di raggio il semiasse trasverso dell'iperbole.

Tale luogo prende nome di *podaria*. Perciò possiamo affermare che la podaria dell'iperbole è la circonferenza di centro il centro dell'iperbole e raggio il semiasse trasverso dell'iperbole.

Proposizione 28) L'ortottica dell'iperbole: cioè l'insieme dei punti del piano da cui le rette tangenti all'iperbole sono perpendicolari tra loro, è una circonferenza di raggio $r = \sqrt{a^2 - b^2}$, dove a e b sono le misure dei semiassi dell'iperbole.

Dimostrazione.

Siano dati l'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un punto $P(x_p; y_p)$ del piano esterno all'iperbole. Sia $\Phi \equiv y = m(x - x_p) + y_p$ il fascio di rette di centro P ; le rette di Φ tangenti all'iperbole sono date imponendo ad m che annulli il determinante del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = m(x - x_p) + y_p \end{cases}$$

Dopo aver sostituito nella prima equazione la y , l'equazione risolvente risulta

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 + 2a^2m(mx_p - y_p)x - a^2(m^2x_p^2 - 2mx_py_p + y_p^2 + b^2) = 0$$

Da cui il determinante:

$$\frac{\Delta}{4} = a^4m^2(mx_p - y_p)^2 + a^2(b^2 - a^2m^2)(m^2x_p^2 \pm -2mx_py_p + y_p^2 + b^2) = 0$$

Sviluppando i calcoli si ha

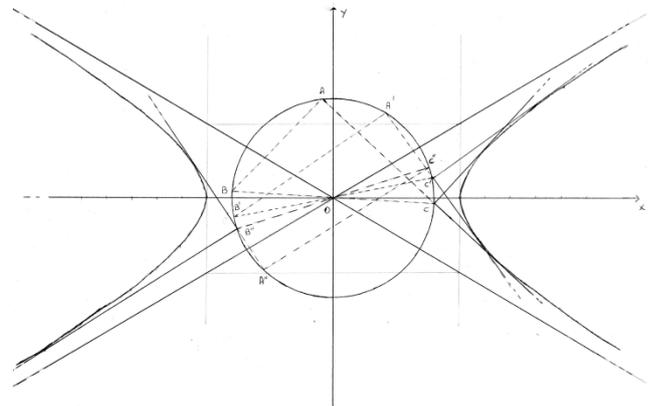


Fig. 22

$$a^4 m^4 x_p^2 - 2a^4 m^3 x_p y_p + a^4 m^2 y_p^2 + a^2 b^2 m^2 x_p^2 - 2a^2 b^2 m x_p y_p + a^2 b^2 y_p^2 + a^2 b^4 + \\ -a^4 m^4 x_p^2 + 2a^4 m^3 x_p y_p - a^4 m^2 y_p^2 - a^4 b^2 m^2 = 0$$

Eliminando i monomi simili ed opposti e semplificando per $a^2 b^2$, si ha

$$(a^2 - x_p^2)m^2 + 2x_p y_p m - (b^2 + y_p^2) = 0$$

Risolvendo, si ha $m_{1,2} = \frac{-x_p y_p \pm \sqrt{x_p^2 y_p^2 + a^2 b^2 + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2 - x_p^2 y_p^2}}{a^2 - x_p^2} = \frac{-x_p y_p \pm \sqrt{a^2 b^2 + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2}}{a^2 - x_p^2}$

Perché i due coefficienti angolari siano l'uno il reciproco e l'opposto dell'altro il loro prodotto deve essere uguale ad -1: cioè

$$\frac{-x_p y_p + \sqrt{a^2 b^2 + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2}}{a^2 - x_p^2} \cdot \frac{-x_p y_p - \sqrt{a^2 b^2 + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2}}{a^2 - x_p^2} = -1$$

Applicando la regola dei prodotti notevoli, si ha

$$\frac{x_p^2 y_p^2 - a^2 b^2 - a^2 y_p^2 + b^2 x_p^2}{(a^2 - x_p^2)^2} = -1$$

Raccogliendo e semplificando si ha $\frac{y_p^2 + b^2}{x_p^2 - a^2} = -1$, che ridotta a forma normale è

$$x_p^2 + y_p^2 = a^2 - b^2$$

Generalizzando si ha

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$$

Che risulta l'equazione di una circonferenza di raggio $r = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Teorema 1). C.N.S affinché una conica sia un'iperbole equilatera è che, presi tre punti A,B,C su di essa, la conica passa per l'ortocentro del triangolo ABC.

2 ELLISSE

- Area dell'ellisse secondo Keplero

Per la ricerca dell'area della parte di piano racchiusa da una ellisse, Keplero fa questo ragionamento. Inscrive l'ellisse in un cerchio di raggio il semiasse maggiore: $r = a$, quindi traccia delle corde sia al cerchio che all'ellisse parallele tra loro e perpendicolari al semiasse maggiore, ogni corda del cerchio intercetta sull'ellisse una corda:

queste due corde stanno nel rapporto $\frac{b}{a}$. Infatti siano

date le equazioni canoniche rispettivamente dell'ellisse, di semiasse maggiore a , e della circonferenza di raggio il semiasse maggiore dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Sia P un punto dell'asse maggiore $P(x_p, 0)$ con

$-a \leq x_p \leq a$. Da P si tracci la retta $x = x_p$ parallela

all'asse delle ordinate, questa intercetta una corda AB sull'ellisse ed una corda CD sulla circonferenza con P punto medio di entrambe le corde. Le coordinate degli estremi di dette corde

sono: $A(x_p; -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_p^2})$, $B(x_p; \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_p^2})$, $C(x_p; -\sqrt{a^2 - x_p^2})$, $D(x_p; \sqrt{a^2 - x_p^2})$,

mentre la lunghezza di dette corde è: $AB = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x_p^2}$ e $CD = 2\sqrt{a^2 - x_p^2}$

Il rapporto di dette corde $\frac{AB}{CD}$ è uguale a $\frac{b}{a}$ qualunque sia la posizione di P nell'intervallo $[-a; a]$.

Pertanto egli concepisce l'area dell'ellisse e quella del cerchio formate dalle infinite corde di spessore infinitesimo costante e pertanto afferma che anche le aree come le corde devono stare nel

rapporto $\frac{b}{a}$: cioè $\frac{A_{el}}{A_{cir}} = \frac{b}{a}$ e quindi $A_{el} = \frac{b}{a}A_{cir} = \frac{b}{a}\pi a^2$, semplificando, egli ottiene $A_{el} = \pi ab$.

Allo stesso risultato si giunge applicando il Principio di Cavalieri per figure piane, che può essere così formulato: "Siano \mathcal{F} e \mathcal{G} due figure piane comprese tra due rette parallele r ed s . Se, per ogni retta t parallela ad r ed s , le lunghezze dei segmenti sezione determinate da t su \mathcal{F} e su \mathcal{G} stanno tra loro in un determinato rapporto costante, allora anche le aree di \mathcal{F} e di \mathcal{G} stanno tra loro nello stesso rapporto".

Proprietà generali sull'ellisse

Proposizione 29) La posizione reciproca di un punto del piano rispetto ad un'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è determinata dalle condizioni:

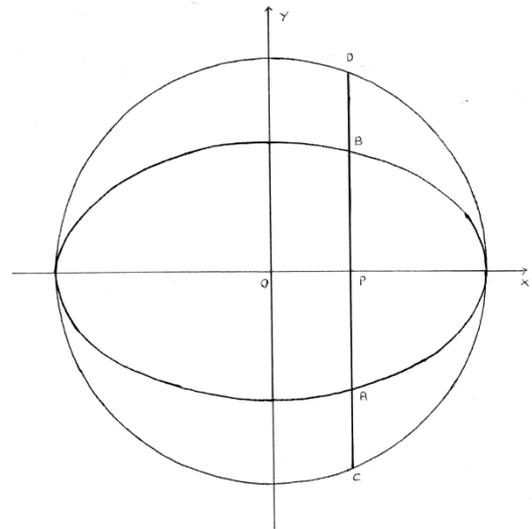


Fig. 23

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} > 1 \quad \text{il punto P è esterno all'ellisse}$$

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1 \quad \text{il punto P è sull' ellisse}$$

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} < 1 \quad \text{il punto P è interno all'ellisse}$$

- Caso del punto esterno Fig. 24

Dimostrazione

Sia P un punto del piano dell'ellisse si possono presentare tre posizioni del punto rispetto all'ellisse

Il punto P sia esterno (nel II cap. abbiamo definito quando P è esterno). Tracciamo da P i due segmenti PF_1 e PF_2 , questi intersecano l'ellisse

rispettivamente in A e B. Tracciamo il segmento AF_2 . Poiché il punto A

appartiene all'ellisse la somma delle sue distanze da F_1 e da F_2 è uguale $2a$: cioè $AF_1 + AF_2 = 2a$.

Dal teorema “ In ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della

loro differenza “, nel triangolo PAF_2

$AF_2 < AP + PF_2$, sommando ad ambo membri della disequaglianza il segmento AF_1 si ottiene una disequaglianza dello stesso verso $AP + PF_2 + AF_1 > AF_2 + AF_1$; ma

$AP + AF_1 = PF_1$, sostituendo si ha $PF_1 + PF_2 > AF_2 + AF_1 = 2a$, quindi

$$PF_1 + PF_2 > 2a$$

Andando a sviluppare tale disequaglianza, dopo aver riferito i punti P, F_1 e F_2 ad un sistema di riferimento con O punto medio di F_1F_2 e la retta sostegno di F_1F_2 asse delle ascisse si verifica che la disequaglianza si trasforma in disequazione : infatti posto $F_1(-c ; 0)$ e $F_2(c ; 0)$ e P $(x_p ; y_p)$ la disequaglianza diventa:

$$\sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} + \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} > 2a$$

Sottraendo ad ambo i membri della disequaglianza una stessa quantità si ottiene una disequaglianza dello stesso verso:

$$\sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} > 2a - \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2}$$

Elevando ambo i membri positivi della disequaglianza al quadrato si ottiene una disequaglianza dello stesso verso :

$$x_p^2 + 2cx_p + c^2 + y_p^2 > 4a^2 + x_p^2 - 2cx_p + c^2 + y_p^2 - 4a\sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2}$$

Eliminando i monomi simili ed opposti ed isolando il radicale si ha

$$4a\sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} > 4a^2 - 4cx_p$$

Semplificando per 4 ed elevando al quadrato ambo i termini si ha

$$+ a^2x_p^2 - 2a^2cx_p + a^2c^2 + a^2y_p^2 > a^4 - 2a^2cx_p + c^2x_p^2$$

Portando al primo membro i monomi che presentano le coordinate di P , si ha

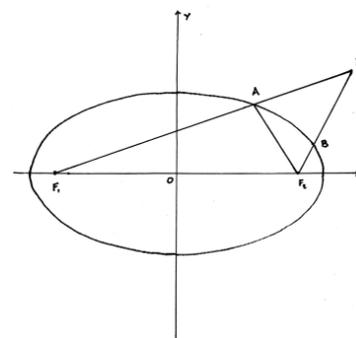


Fig. 24

$$a^2x_p^2 - c^2x_p^2 + a^2y_p^2 > a^4 - a^2c^2$$

Raccogliendo e dividendo ambo i termini per $a^2(a^2 - c^2) > 0$ si ha

$$\frac{(a^2-c^2)x_p^2}{a^2(a^2-c^2)} + \frac{a^2y_p^2}{a^2(a^2-c^2)} > \frac{a^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}$$

Semplificando si ha

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} > 1$$

-) Caso del punto interno Fig. 25

Il punto P sia interno (nel II cap. abbiamo definito quando P è esterno). Tracciamo da P i due segmenti PF_1 e PF_2 , il prolungamento di PF_1 interseca l'ellisse in A . Tracciamo il segmento AF_2 . Poiché il punto A appartiene all'ellisse la somma delle sue distanze da F_1 e da F_2 è uguale $2a$: cioè $AF_1 + AF_2 = 2a$. Dal teorema “ In ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza “, Relativamente al triangolo APF_2 il lato $PF_2 < AP + AF_2$, sommando a questa disequaglianza la stessa quantità si ha $PF_2 + PF_1 < AP + PF_1 + AF_2 = AF_1 + AF_2 = 2a$, per la proprietà transitiva della disequaglianza si ha

$$PF_2 + PF_1 < 2a$$

Andando a sviluppare tale disequaglianza, dopo aver riferito i punti P, F_1 e F_2 ad un sistema di riferimento con O punto medio di F_1F_2 e la retta sostegno di F_1F_2 asse delle ascisse si verifica che la disequaglianza si trasforma in disequazione e precisamente

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} < 1$$

Quando P è sull'ellisse, basta sostituire le sue coordinate all'equazione dell'ellisse.

Sia Q un punto qualsiasi dell'ellisse di asse maggiore AA' e centro C. Sia N la proiezione di Q su AA' ; sia T, sulla retta AA'

Teorema 2). C.N.S perché la retta passante per T e Q sia la tangente all'ellisse in Q è che T sia la coniugata armonica di N rispetto ad A ed ad A' : cioè $\frac{AT}{A'T} = \frac{AN}{A'N}$.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, i punti $A(-a; 0)$

$A'(a; 0)$, un punto generico $Q(x_q; y_q)$ tale che $\frac{x_q^2}{a^2} + \frac{y_q^2}{b^2} = 1$

Sia $N(x_q; 0)$ la proiezione di Q sull'asse dell'ellisse

- a) Supponiamo che la retta TQ sia la retta tangente all'ellisse nel punto Q, la cui equazione con la regola dello sdoppiamento è $\frac{x_q}{a^2}x + \frac{y_q}{b^2}y = 1$. Vogliamo verificare che vale la relazione

$$\frac{AT}{A'T} = \frac{AN}{A'N}$$

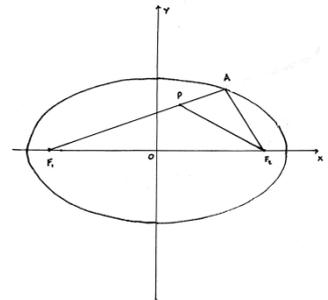


Fig. 25

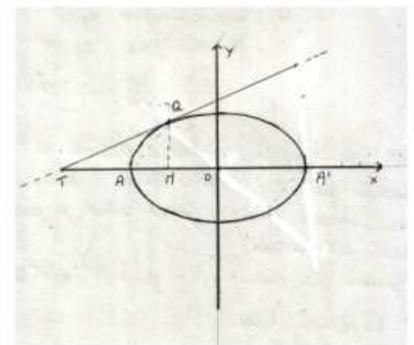


Fig.26

Determiniamo le coordinate di T, intersecando la retta tangente con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} \frac{x_q}{a^2}x + \frac{y_q}{b^2}y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } T\left(\frac{a^2}{x_q}; 0\right). \text{ Calcoliamo le distanze presenti nella relazione}$$

$$AT = \left| \frac{a^2}{x_q} + a \right| ; A'T = \left| \frac{a^2}{x_q} - a \right| ; AN = |x_q + a| ; A'N = |x_q - a|$$

Ricordando che il quoto dei moduli è uguale al modulo del quoto, possiamo scrivere:

$$\left| \frac{\frac{a^2}{x_q} + a}{\frac{a^2}{x_q} - a} \right| = \left| \frac{x_q + a}{x_q - a} \right|$$

Al primo membro, operando il m.c.d. e semplificando i denominatori, si ha

$$\left| \frac{a(a+x_q)}{a(a-x_q)} \right| = \left| \frac{x_q+a}{x_q-a} \right|$$

Al primo membro semplificando ed invertendo il segno al denominatore, trovandosi entro il valore

assoluto, si ha un'identità : $\left| \frac{x_q+a}{x_q-a} \right| = \left| \frac{x_q+a}{x_q-a} \right|$, pertanto la relazione è verificata

b) Supponiamo ora verificata la relazione

$$\frac{AT}{A'T} = \frac{AN}{A'N}$$

vogliamo verificare che la retta TQ sia tangente all'ellisse: sia $T(z; 0)$, calcoliamo il valore di z con $z < -a$ oppure $z > a$ nota la relazione:

$$AT = |z + a| ; A'T = |z - a| ; AN = |x_q + a| ; A'N = |x_q - a|$$

Ricordando che il quoto dei moduli è uguale al modulo del quoto, possiamo scrivere:

$$\left| \frac{z + a}{z - a} \right| = \left| \frac{x_q + a}{x_q - a} \right|$$

Sciogliamo i moduli: $\frac{z+a}{z-a} = \pm \frac{x_q+a}{x_q-a}$ e risolviamo in z :

$$\text{-) : } \frac{z+a}{z-a} = \frac{x_q+a}{x_q-a} ; z x_q - az + ax_q - a^2 = z x_q + za - ax_q - a^2 ; z = x_p \text{ non accettabile}$$

$$\text{-) : } \frac{z+a}{z-a} = -\frac{x_q+a}{x_q-a} ; z x_q - az + ax_q - a^2 = -z x_q - za + ax_q + a^2 ; z = \frac{a^2}{x_p} \text{ accettabile}$$

Le coordinate di T sono $\left(\frac{a^2}{x_q}; 0\right)$. Ora determiniamo l'equazione della retta passante per T e Q:

$$\frac{y - y_q}{-y_q} = \frac{x - x_q}{\frac{a^2}{x_q} - x_q}$$

$$\text{Da cui operando si ha } y - y_q = \frac{-x_q y_q (x - x_q)}{a^2 - x_q^2} ; y = \frac{-x_q y_q (x - x_q)}{a^2 \left(1 - \frac{x_q^2}{a^2}\right)} + y_q ;$$

$$y = \frac{-x_q y_q (x - x_q)}{a^2 \frac{y_q^2}{b^2}} + y_q ; y = \frac{-x_q (x - x_q)}{a^2 \frac{y_q}{b^2}} + y_q ; \frac{y_q}{b^2} y + \frac{x_q}{a^2} x = \frac{x_q^2}{a^2} + \frac{y_q^2}{b^2} = 1$$

Quindi la retta passante per T e Q ha equazione

$$\frac{y_q}{b^2}y + \frac{x_q}{a^2}x = 1$$

Che risulta per la regola dello sdoppiamento l'equazione della retta tangente in Q all'ellisse.

Proposizione 30) I punti medi delle corde di un'ellisse parallele ad un suo diametro appartengono al diametro coniugato.

Dimostrazione

Data l'equazione dell'ellisse canonica nella forma implicita :

$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, la ricerca dei diametri coniugati viene determinata risolvendo $a^2m \cdot m' + b^2 = 0$. Pertanto posto $y = mx$ un diametro dell'ellisse il coefficiente m' del suo coniugato è $m' = -\frac{b^2}{a^2m}$, quindi $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$ è l'equazione del diametro coniugato. Consideriamo una corda parallela al diametro $y = mx$, essa appartiene alla retta parallela al diametro stesso : $y = mx + h$.

Intersechiamo tale retta con l'ellisse e troviamo le coordinate degli estremi A e B della corda:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2hmx + a^2h^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2hmx + a^2h^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-a^2hm \pm \sqrt{a^4h^2m^2 - a^2b^2h^2 + a^2b^4 - a^4b^2h^2 + a^4b^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} \\ y = mx + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-a^2hm \pm ab\sqrt{b^2 - h^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} \\ y_{1,2} = \frac{-a^2hm^2 \pm mab\sqrt{b^2 - h^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} + h \end{cases}$$

$$A \left(\frac{-a^2hm + ab\sqrt{b^2 - h^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} ; \frac{-a^2hm^2 + mab\sqrt{b^2 - h^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} + h \right)$$

$$B \left(\frac{-a^2hm - ab\sqrt{b^2 - h^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} ; \frac{-a^2hm^2 - mab\sqrt{b^2 - h^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} + h \right)$$

Il punto medio della corda AB ha coordinate: $M_{AB} \left(\frac{-a^2hm}{b^2 + a^2m^2} ; \frac{b^2h}{b^2 + a^2m^2} \right)$

Verifichiamo che tale punto appartiene al diametro coniugato

$$\frac{b^2h}{b^2 + a^2m^2} = -\frac{b^2}{a^2m} \left(\frac{-a^2hm}{b^2 + a^2m^2} \right)$$

Al secondo membro semplificando si ha l'identità:

$$\frac{b^2h}{b^2 + a^2m^2} = \frac{b^2h}{b^2 + a^2m^2}$$

Al variare di h si trovano tutte le corde parallele al diametro di coefficiente angolare m

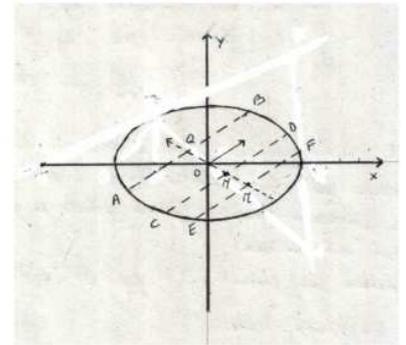


Fig. 27

Quindi tutti i punti medi al variare di h appartengono al diametro coniugato di $y = mx$.

Proposizione 31) In ogni ellisse la somma dei quadrati costruiti su due diametri coniugati qualsiasi è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli assi.

Dimostrazione:

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e due suoi diametri coniugati: $s_1 \equiv y = mx$ ed $s_2 \equiv y = -\frac{b^2}{a^2m}x$; siano C, E e D, F rispettivamente i punti di intersezione di s_1 e di s_2 con l'ellisse, le cui coordinate sono date dalle soluzioni dei due seguenti sistemi;

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \\ y_{1,2} = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = -\frac{b^2}{a^2m}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^4m^2} = 1 \\ y = -\frac{b^2}{a^2m}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \\ y_{1,2} = \mp \frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \end{cases}$$

$$C \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right) , E \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; -\frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

$$D \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right) , F \left(\frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; -\frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

$$CE^2 = \frac{4a^2b^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{4a^2b^2m^2}{b^2+a^2m^2} ; DF^2 = \frac{4a^4m^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{4b^4}{b^2+a^2m^2}$$

$$CE^2 + DF^2 = \frac{4a^2b^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{4a^2b^2m^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{4a^4m^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{4b^4}{b^2+a^2m^2} = \frac{4a^2(b^2+a^2m^2)+4b^2(b^2+a^2m^2)}{b^2+a^2m^2} = 4a^2 + 4b^2$$

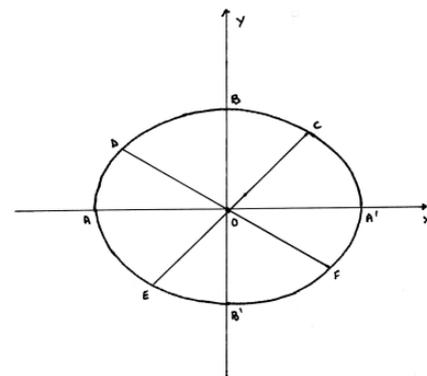


Fig. 28

Proposizione 32) Se tracciano le tangenti agli estremi di una coppia di diametri coniugati di un'ellisse il parallelogrammo formato da queste quattro tangenti è equivalente al rettangolo costruito sugli assi

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e due suoi diametri coniugati: $s_1 \equiv y = mx$ ed $s_2 \equiv y = -\frac{b^2}{a^2m}x$; siano E, G e F, H rispettivamente i punti di intersezione di s_1 e di s_2 con l'ellisse, le cui coordinate sono date dalle soluzioni dei due seguenti sistemi;

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \\ y_{1,2} = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \end{cases}$$

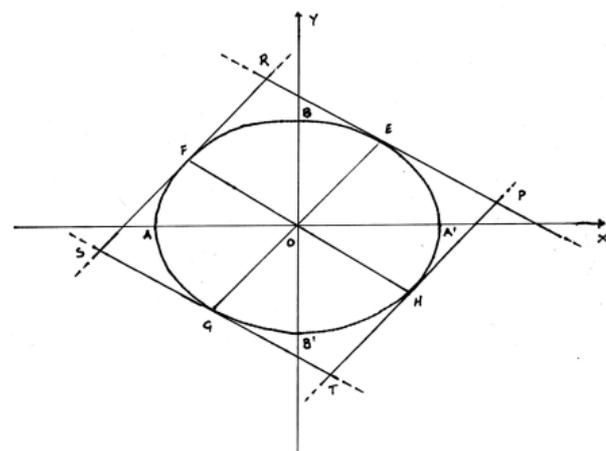


Fig.29

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = -\frac{b^2}{a^2m}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^4m^2} = 1 \\ y = -\frac{b^2}{a^2m}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \\ y_{1,2} = \mp \frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \end{cases}$$

$$E \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right) , G \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; -\frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

$$F \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right) , H \left(\frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; -\frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

Determiniamo, mediante la regola dello sdoppiamento le equazioni delle tangenti in E , F, G, H all'ellisse:

$$t_E \equiv \frac{b}{a\sqrt{b^2+a^2m^2}}x + \frac{am}{b\sqrt{b^2+a^2m^2}}y = 1 \quad \rightarrow \quad t_E \equiv b^2x + a^2my = ab\sqrt{b^2+a^2m^2}$$

$$t_F \equiv -\frac{m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}x + \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}y = 1 \quad \rightarrow \quad t_F \equiv -mx + y = \sqrt{b^2+a^2m^2}$$

$$t_G \equiv -\frac{b}{a\sqrt{b^2+a^2m^2}}x - \frac{am}{b\sqrt{b^2+a^2m^2}}y = 1 \quad \rightarrow \quad t_G \equiv b^2x + a^2my = -ab\sqrt{b^2+a^2m^2}$$

$$t_H \equiv \frac{m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}x - \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}y = 1 \quad \rightarrow \quad t_H \equiv mx - y = \sqrt{b^2+a^2m^2}$$

Applicando il teorema di geometria elementare che dice “ la diagonale di un parallelogrammo divide il parallelogrammo in due triangoli congruenti “ , l'area del parallelogrammo individuato dalle rette tangenti, parallele a due a due, è data dal doppio dell'area del triangolo PRS. Pertanto andiamo a determinare le coordinate di P , R , S che sono le soluzioni dei seguenti sistemi:

$$P \equiv \begin{cases} mx - y = \sqrt{b^2+a^2m^2} \\ b^2x + a^2my = ab\sqrt{b^2+a^2m^2} \end{cases} \quad P \left(\frac{a(am+b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{b(am-b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

$$R \equiv \begin{cases} -mx + y = \sqrt{b^2+a^2m^2} \\ b^2x + a^2my = ab\sqrt{b^2+a^2m^2} \end{cases} \quad R \left(\frac{a(b-am)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{b(am+b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

$$S \equiv \begin{cases} -mx + y = \sqrt{b^2+a^2m^2} \\ b^2x + a^2my = -ab\sqrt{b^2+a^2m^2} \end{cases} \quad S \left(-\frac{a(am+b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} ; \frac{b(b-am)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} \right)$$

Applicando le matrici, l'area del parallelogrammo è:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} \frac{a(am+b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} & \frac{b(am-b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} & 1 \\ -\frac{a(am+b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} & \frac{b(b-am)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} & 1 \\ \frac{a(b-am)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} & \frac{b(am+b)}{\sqrt{b^2+a^2m^2}} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left| \left[\frac{ab(b^2-a^2m^2)}{b^2+a^2m^2} - \frac{ab(b-am)^2}{b^2+a^2m^2} - \frac{ab(b+am)^2}{b^2+a^2m^2} \right] - \left[\frac{ab(b-am)^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{ab(b^2-a^2m^2)}{b^2+a^2m^2} + \frac{ab(b+am)^2}{b^2+a^2m^2} \right] \right| = \\ &= \frac{2ab(b-am)^2}{b^2+a^2m^2} + \frac{2ab(b+am)^2}{b^2+a^2m^2} = \frac{2ab(b^2-2abm+a^2m^2+b^2+2abm+a^2m^2)}{b^2+a^2m^2} = \frac{4ab(b^2+a^2m^2)}{b^2+a^2m^2} = 4ab \end{aligned}$$

Si possono dedurre come corollari alle precedenti proposizioni 3) e 4) i

Teoremi di Apollonio :

-) **Teorema 3)** Tutti i parallelogrammi inscritti in una ellisse, aventi come diagonali due diametri coniugati, sono equivalenti

-) **Teorema 4)** Due parallelogrammi circoscritti ad un'ellisse coi lati paralleli a due coppie di diametri coniugati sono equivalenti

Def. 4) : Si chiama raggio di un punto P di un'ellisse il segmento congiungente il punto ed il fuoco. Ad ogni punto dell'ellisse, avendo due fuochi, arrivano due raggi.

Proposizione 33) Le lunghezze dei raggi di un punto dell'ellisse, in funzione dell'ascissa del punto relativo, misurano:

$$r_1 = a + e x_p, \quad r_2 = a - e x_p,$$

dove e è l'eccentricità dell'ellisse : $e = \frac{c}{a}$

Dimostrazione

Sia $P(x_p; y_p)$ con $\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1$.

$$\begin{aligned} r_2 = PF_2 &= \sqrt{(x_p - c)^2 + y_p^2} = \sqrt{x_p^2 - 2cx_p + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_p^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x_p^2 - 2cx_p + c^2 + a^2 - c^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_p^2 - 2cx_p + a^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x_p\right)^2} = a - e x_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 = PF_1 &= \sqrt{(x_p + c)^2 + y_p^2} = \sqrt{x_p^2 + 2cx_p + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_p^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x_p^2 + 2cx_p + c^2 + a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_p^2 + 2cx_p + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x_p\right)^2} = \\ &= a + e x_p \end{aligned}$$

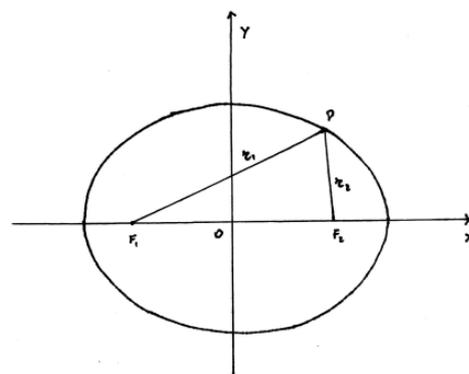


Fig.30

Proposizione 34) Data la retta tangente all'ellisse nel punto P, questa interseca le direttrici, relative ai fuochi F_1 ed F_2 rispettivamente nei punti K_1 ed K_2 . Dimostrare che gli angoli PF_1K_1 e PF_2K_2 sono retti.

Dimostrazione

Per dimostrare la proprietà basta verificare che i coefficienti angolari delle rette sostegno dei lati F_1K_1 e F_1P del triangolo PF_1K_1 soddisfino la relazione di perpendicolarità: $m_{F_1K_1} \cdot m'_{PF_1} = -1$.

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, il punto $P(x_p; y_p)$ con $\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1$, i fuochi $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$, le equazioni delle direttrici: $d_1 \equiv x = -\frac{a^2}{c}$ e $d_2 \equiv x = \frac{a^2}{c}$ ed infine l'equazione della retta tangente in P : $\frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1$. Calcoliamo le coordinate dei punti K_1 e K_2

$$K_1 \equiv \begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ x = -\frac{a^2}{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{b^2}{cy_p}(c + x_p) \\ x = -\frac{a^2}{c} \end{cases}$$

$$K_1 \left(-\frac{a^2}{c}; \frac{b^2}{cy_p}(c + x_p) \right)$$

$$K_2 \equiv \begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ x = \frac{a^2}{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{b^2}{cy_p}(c - x_p) \\ x = \frac{a^2}{c} \end{cases} \quad K_2 \left(\frac{a^2}{c}; \frac{b^2}{cy_p}(c - x_p) \right)$$

Calcoliamo i coefficienti angolari:

$$m_{F_1K_1} = \frac{\frac{b^2}{cy_p}(c+x_p)}{-\frac{a^2}{c} + c} = \frac{\frac{b^2}{cy_p}(c+x_p)}{\frac{c^2 - a^2}{c}} = \frac{\frac{b^2}{cy_p}(c+x_p)}{-\frac{b^2}{c}} = -\frac{c+x_p}{y_p}$$

$$m'_{PF_1} = \frac{y_p}{x_p + c}$$

Moltiplicando $m_{F_1K_1} \cdot m'_{PF_1} = -\frac{c+x_p}{y_p} \cdot \frac{y_p}{x_p+c} = -1$, pertanto l'angolo PF_1K_1 è retto

Calcoliamo i coefficienti angolari:

$$m_{F_2K_2} = \frac{\frac{b^2}{cy_p}(c-x_p)}{\frac{a^2}{c} - c} = \frac{\frac{b^2}{cy_p}(c-x_p)}{\frac{a^2 - c^2}{c}} = \frac{\frac{b^2}{cy_p}(c-x_p)}{\frac{b^2}{c}} = \frac{c-x_p}{y_p}$$

$$m'_{PF_2} = \frac{y_p}{x_p - c} = -\frac{y_p}{c - x_p}$$

Moltiplicando $m_{F_2K_2} \cdot m'_{PF_2} = \frac{c-x_p}{y_p} \cdot \left(-\frac{y_p}{c-x_p}\right) = -1$, pertanto l'angolo PF_2K_2 è retto.

Proposizione 35) Sia Q il punto di intersezione della retta tangente in P all'ellisse con l'asse focale, sia H la proiezione di P sull'asse focale ed O il centro dell'ellisse. Dimostrare che nel triangolo PQO vale la seguente relazione: $OQ \cdot OH = OA^2$, dove OA è la misura del semiasse principale.

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, il punto

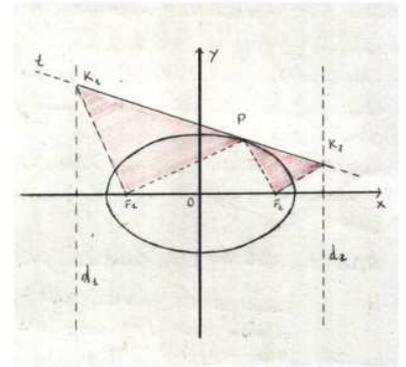
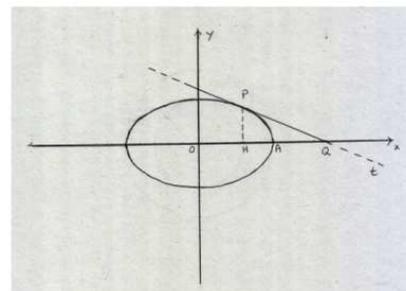


Fig. 31

Fig.32



$P(x_p; y_p)$ con $\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1$, l'equazione della retta tangente in P: $\frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1$, il punto O (0; 0), il punto A (a; 0) e il punto H (x_p ; 0). Calcoliamo le coordinate di Q

$$\begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2}{x_p} \\ y = 0 \end{cases} \quad Q\left(\frac{a^2}{x_p}; 0\right)$$

Andiamo a calcolare le misure di $OQ = \left|\frac{a^2}{x_p}\right|$; $OH = |x_p|$; $OA = |a|$; sostituendo nella relazione $OQ \cdot OH = OA^2$, abbiamo $\left|\frac{a^2}{x_p}\right| \cdot |x_p| = |a|^2$. Applicando le proprietà dei moduli e precisamente “ il prodotto dei moduli è uguale al modulo del prodotto “ e “ il modulo di una quantità positiva uguale alla quantità stessa “, si ha

$$\left|\frac{a^2}{x_p} \cdot x_p\right| = |a|^2 \rightarrow a^2 = a^2$$

Pertanto qualunque sia il punto P la relazione è verificata.

Corollario: -) Da ciascun fuoco dell'ellisse, si vede sotto un angolo retto la parte di tangente compresa tra il punto P di tangenza e la direttrice d associata al fuoco considerato.

Def. 5) “Si chiama quadrilatero completo la figura piana costituita da quattro punti, di cui mai tre allineati, detti *vertici* e dalle sei rette che congiungono i vertici a due a due, detti *lati*.”

Def. 6): “Si chiamano lati opposti due lati tali che se uno congiunge due vertici, l'altro congiunge gli altri due.”

Le coppie di lati opposti sono tre e si incontrano in tre punti, detti punti *diagonali*.

I punti A, B, C, D sono i vertici del quadrilatero completo, i lati r_1 (A,B), r_2 (B,C), r_3 (C, D), r_4 (D, A), r_5 (A, C), r_6 (B, D) i lati opposti sono $(r_1; r_3)$, $(r_2; r_4)$, $(r_5; r_6)$ i punti diagonali sono $L = r_1 \cap r_3$, $K = r_2 \cap r_4$, $H = r_5 \cap r_6$

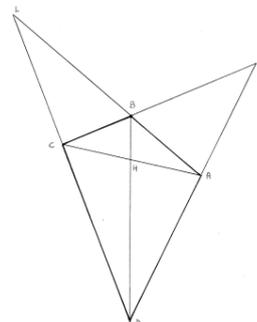


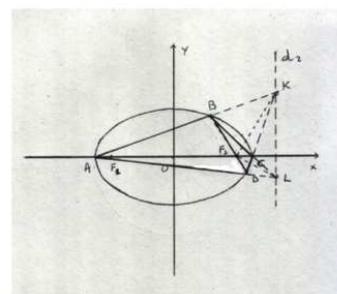
Fig. 33

Proposizione 36) Se un quadrilatero completo ABCD è inscritto in una ellisse con le diagonali, che si intersecano nel fuoco (F_2), allora i prolungamenti dei lati opposti si intersecano sulla direttrice KL relativa al fuoco F_2 con K ed L punti diagonali.

(Questa proprietà costituisce un'applicazione della proprietà involutoria dei quadrilateri armonici in teoria della prospettiva)

Fig. 34

Questa proprietà ci permette di costruire geometricamente la direttrice una volta conosciuto il fuoco: basti tracciare due corde dell'ellisse che si intersecano sul fuoco, costruisco il quadrilatero convesso avente per vertici gli estremi delle corde, interseco i



prolungamenti dei lati opposti del quadrilatero e traccia la retta passante per i due punti di intersezione: questa è la direttrice cercata.

Proposizione 37) La tangente ad un'ellisse in un suo punto qualsiasi P è la bisettrice dell'angolo esterno al triangolo F_1PF_2 , mentre la normale è la bisettrice dell'angolo interno F_1PF_2

Dimostrazione

Siano dati l'equazione dell'ellisse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto

$P(x_p; y_p) : \frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1$ cioè $b^2x_p^2 + a^2y_p^2 = a^2b^2$. Le coordinate dei fuochi sono : $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$ e l'equazione della retta t tangente in P all'ellisse è $\frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1$.

Supponiamo, senza ledere la generalità del punto P, che il punto P

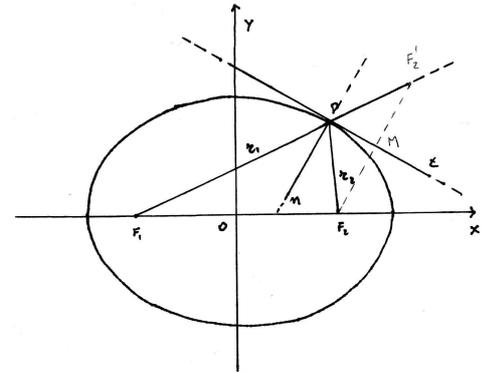


Fig. 35

Fig. 34
 cada nel primo quadrante. Sia F'_2 il punto simmetrico del punto F_2 rispetto alla tangente in P, se F'_2 cade sul prolungamento del segmento

F_1P , allora, essendo il triangolo F'_2PF_2 isoscele sulla base F'_2F_2 ed essendo la tangente in P asse di simmetria è anche bisettrice dell'angolo F'_2PF_2 , ma se F'_2 cade sul prolungamento segmento F_1P , allora l'angolo F_1PF_2 è diviso dalla tangente in due parti congruenti e quindi la tangente all'ellisse nel punto P è bisettrice dell'angolo esterno di F_1PF_2 . Non ci resta che verificare se F'_2 cade sul prolungamento del segmento F_1P .

Sia $r \equiv \frac{y_p}{b^2}x - \frac{x_p}{a^2}y = \frac{cy_p}{b^2}$ la retta perpendicolare a t passante per F_2 , sia M il punto di intersezione di r con t :

$$\begin{cases} \frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1 \\ \frac{y_p}{b^2}x - \frac{x_p}{a^2}y = \frac{cy_p}{b^2} \end{cases} \quad \text{applicando la regola di Cramer calcoliamo le soluzioni}$$

$$x_M = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{y_p}{b^2} \\ \frac{cy_p}{b^2} & -\frac{x_p}{a^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x_p}{a^2} & \frac{y_p}{b^2} \\ \frac{y_p}{b^2} & -\frac{x_p}{a^2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x_p}{a^2} - \frac{y_p cy_p}{b^4}}{-\frac{x_p^2}{a^4} - \frac{y_p^2}{b^4}} = \frac{a^2b^4x_p + a^4cy_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} ; \quad y_M = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x_p}{a^2} & 1 \\ \frac{y_p}{b^2} & \frac{cy_p}{b^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x_p}{a^2} & \frac{y_p}{b^2} \\ \frac{y_p}{b^2} & -\frac{x_p}{a^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{cx_p y_p}{a^2b^2} - \frac{y_p}{b^2}}{-\frac{x_p^2}{a^4} - \frac{y_p^2}{b^4}} = \frac{-a^2b^2cx_p y_p + a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}$$

Applicando la simmetria per punti, le coordinate di F'_2 sono

$$x' = 2 \cdot \frac{a^2b^4x_p + a^4cy_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} - c = \frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p^2 - b^4cx_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} ; \quad y' = \frac{-2a^2b^2cx_p y_p + 2a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}$$

$$F'_2 \left(\frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p^2 - b^4cx_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} ; \frac{-2a^2b^2cx_p y_p + 2a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} \right)$$

Verifichiamo la formula dell'allineamento di tre punti:

$$\frac{-2a^2b^2cx_p y_p + 2a^4b^2y_p}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} - 0 = \frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p^2 - b^4cx_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} + c$$

$$\frac{-2a^2b^2cx_p + 2a^4b^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} = \frac{2a^2b^4x_p + a^4cy_p^2 - b^4cx_p^2 + b^4cx_p^2 + a^4cy_p^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} = \frac{2a^2b^4x_p + 2a^4cy_p^2}{(x_p + c)(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)}$$

$$= \frac{2a^2b^4x_p + 2a^2b^2c(a^2 - x_p^2)}{(x_p + c)(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)} = \frac{2a^2b^2(-cx_p + a^2)(x_p + c)}{(x_p + c)(b^4x_p^2 + a^4y_p^2)} = \frac{-2a^2b^2cx_p + 2a^4b^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} =$$

$$\frac{-2a^2b^2cx_p + 2a^4b^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2} = \frac{-2a^2b^2cx_p + 2a^4b^2}{b^4x_p^2 + a^4y_p^2}$$

L'identità ottenuta conferma l'allineamento dei punti, quindi F_2' appartiene al prolungamento del segmento F_1P , quindi è dimostrato che la tangente in un punto all'ellisse è la bisettrice dell'angolo esterno al triangolo F_1PF_2 e di conseguenza la bisettrice dell'angolo interno a F_1PF_2 , suo supplementare è la perpendicolare alla tangente e risulta la normale all'ellisse in P.

Proposizione 38) (XXI Proposizione di Apollonio) In un triangolo ABC inscritto in una semiellisse con la base coincidente con l'asse maggiore AB vale la seguente relazione:

$$\frac{AH \cdot BH}{CH^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

dove a e b sono le misure del semiasse maggiore e del semiasse minore ed H la proiezione di C sull'asse maggiore. Se il triangolo ABC è inscritto in una semiellisse con la base coincidente con l'asse minore e la proiezione cade sull'asse minore vale la seguente relazione:

$$\frac{AH \cdot BH}{CH^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare la prima parte, in quanto la seconda parte è perfettamente analoga.

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un suo punto

$C(x_C; y_C)$: $\frac{x_C^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = 1$ cioè $b^2x_C^2 + a^2y_C^2 = a^2b^2$. Le coordinate dei vertici sono: A (-a; 0) e B (a; 0), mentre il punto proiezione ha coordinate

H (x_C ; 0). Calcoliamo le misure di

AH = $x_C + a$; BH = $a - x_C$; CH = $|y_C|$, sostituendo in $\frac{AH \cdot BH}{CH^2}$, si ha

$$\frac{(a + x_C)(a - x_C)}{(|y_C|)^2} = \frac{a^2 - x_C^2}{y_C^2} = \frac{a^2 - x_C^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_C^2)} = \frac{a^2}{b^2}$$

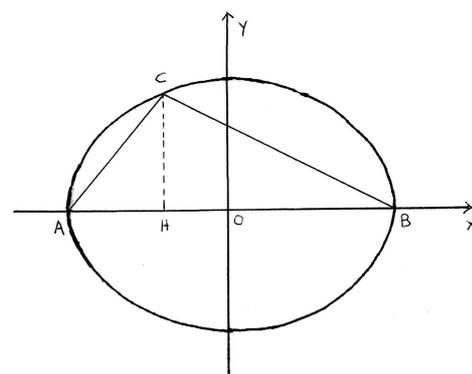


Fig.36

Pertanto è verificata la relazione

$$\frac{AH \cdot BH}{CH^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Relazione che non è altro la generalizzazione del secondo teorema di Euclide, infatti se sostituiamo all'ellisse la circonferenza, il triangolo è un triangolo rettangolo con AH e BH le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e CH è l'altezza relativa all'ipotenusa; nella circonferenza $a = b$, pertanto il rapporto dei loro quadrati è 1 e quindi $AH \cdot BH = CH^2$

Proposizione 39) L'ortottica dell'ellisse: cioè l'insieme dei punti del piano da cui le rette tangenti all'ellisse sono perpendicolari tra loro, è una circonferenza di raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dove a e b sono le misure dei semiassi dell'ellisse.

Dimostrazione.

Siano dati l'equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed un punto P ($x_p; y_p$) del piano esterno all'ellisse. Sia $\Phi \equiv y = m(x - x_p) + y_p$ il fascio di rette di centro P; le rette di Φ tangenti all'ellisse sono date imponendo ad m che annulli il determinante del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = m(x - x_p) + y_p \end{cases}$$

Dopo aver sostituito nella prima equazione la y, l'equazione risolvente risulta $(b^2 + a^2m^2)x^2 - 2a^2m(mx_p - y_p)x + a^2(m^2x_p^2 - 2mx_py_p + y_p^2 - b^2) = 0$

Da cui il determinante:

$$\frac{\Delta}{4} = a^4m^2(mx_p - y_p)^2 - a^2(b^2 + a^2m^2)(m^2x_p^2 - 2mx_py_p + y_p^2 - b^2) = 0$$

Sviluppando i calcoli si ha

$$\begin{aligned} &a^4m^4x_p^2 - 2a^4m^3x_py_p + a^4m^2y_p^2 + \\ &-a^2b^2 + +2a^2b^2mx_py_p - a^2b^2y_p^2 + a^2b^4 + \\ &-a^4m^4x_p^2 + 2a^4m^3x_py_p - a^4m^2y_p^2 + a^4b^2m^2 = 0 \end{aligned}$$

Eliminando i monomi simili ed opposti e semplificando

per a^2b^2 , si ha

$$(a^2 - x_p^2)m^2 + 2x_py_p m + (b^2 - y_p^2) = 0$$

Risolvendo, si ha $m_{1,2} = \frac{-x_py_p \pm \sqrt{x_p^2y_p^2 - a^2b^2 + a^2y_p^2 - b^2x_p^2 - x_p^2y_p^2}}{a^2 - x_p^2} = \frac{-x_py_p \pm \sqrt{-a^2b^2 + a^2y_p^2 - b^2x_p^2}}{a^2 - x_p^2}$

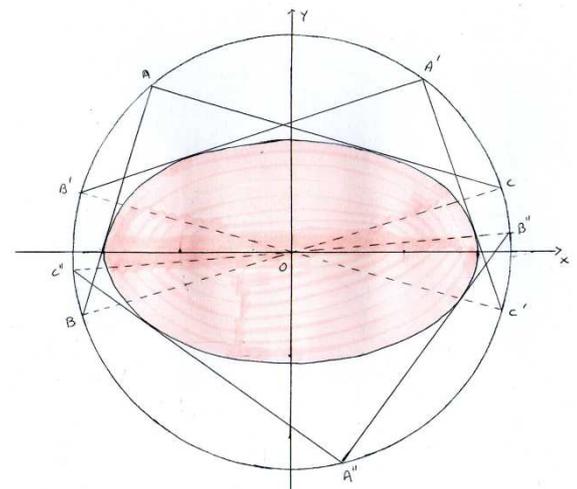


Fig.37

Perché i due coefficienti angolari siano l'uno il reciproco e l'opposto dell'altro il loro prodotto deve essere uguale ad -1: cioè

$$\frac{-x_p y_p + \sqrt{-a^2 b^2 + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2}}{a^2 - x_p^2} \cdot \frac{-x_p y_p - \sqrt{-a^2 b^2 + a^2 y_p^2 - b^2 x_p^2}}{a^2 - x_p^2} = -1$$

Applicando la regola dei prodotti notevoli, si ha

$$\frac{x_p^2 y_p^2 + a^2 b^2 - a^2 y_p^2 + b^2 x_p^2}{(a^2 - x_p^2)^2} = -1$$

Raccogliendo e semplificando si ha $\frac{-y_p^2 + b^2}{a^2 - x_p^2} = -1$, che ridotta a forma normale è

$$x_p^2 + y_p^2 = a^2 + b^2$$

Generalizzando si ha

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Che risulta l'equazione di una circonferenza di raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Iperbole ed ellisse

Proposizione 40): L'ellisse e l'iperbole che hanno gli stessi fuochi si intersecano ad angolo retto.

Dimostrazione

Siano date le equazioni dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e

l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Per ipotesi le due coniche hanno gli stessi fuochi: cioè $a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = c^2$ con $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$. Intersechiamo le due coniche e cerchiamo i punti in comune:

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)y^2 = 0 \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{(a^2 - \alpha^2)}{a^2 \alpha^2} \cdot \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + \beta^2)} x^2 \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

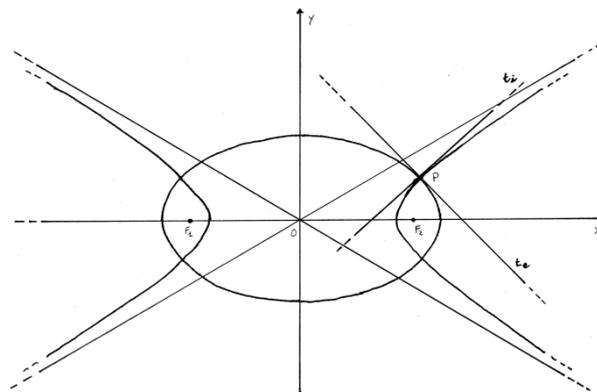


Fig. 38

Dalla relazione $a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2$ possiamo dedurre la seguente identità: $a^2 - \alpha^2 = b^2 + \beta^2$: questo ci permette di semplificare la prima equazione del sistema, ottenendo la soluzione:

$$\begin{cases} y_{1,2} = \pm \frac{b\beta}{a\alpha} x \\ x_{1,2} = \pm \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{cases}$$

Pertanto componendo le soluzioni, otteniamo quattro punti:

$$P_1\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \frac{b\beta}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right); P_2\left(-\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \frac{b\beta}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right); P_3\left(-\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}; -\frac{b\beta}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right); P_4\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}; -\frac{b\beta}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$$

Ricordando che due curve che si intersecano in un punto P sono tra loro perpendicolari se le tangenti condotte per P alle due curve sono tra loro perpendicolari, consideriamo il punto P₁ e tracciamo le rette tangenti sia all'ellisse che all'iperbole:

$$t_e \equiv \frac{\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}}{a^2} x + \frac{\frac{b\beta}{\sqrt{a^2 - b^2}}}{b^2} y = 1 \quad \text{il cui coefficiente angolare è} \quad m_e = -\frac{b\alpha}{a\beta}$$

$$t_i \equiv \frac{\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}}{a^2} x - \frac{\frac{b\beta}{\sqrt{a^2 - b^2}}}{\beta^2} y = 1 \quad \text{il cui coefficiente angolare è} \quad m_i = \frac{a\beta}{b\alpha}$$

Perché t_e e t_i siano perpendicolari, il prodotto dei loro coefficienti angolari deve essere uguale a -1: verifichiamo $m_e \cdot m_i = -\frac{b\alpha}{a\beta} \cdot \frac{a\beta}{b\alpha} = -1$, pertanto le due rette sono perpendicolari e di conseguenza in P₁ l'ellisse e l'iperbole sono perpendicolari. Con analogo ragionamento possiamo affermare che nei restanti punti le due curve sono perpendicolari.

Teorema 5 (di Pascal, descritto dallo stesso come *misterium hexagrammaticum*)

Se A, B, C, D, E, F sono i vertici di un esagono inscritto in una conica, e se P è il punto di intersezione di AB con DE e Q il punto di intersezione di BC con EF, allora PQ, CD e FA sono rette che appartengono allo stesso fascio proprio od improprio. (vedi figura accanto)

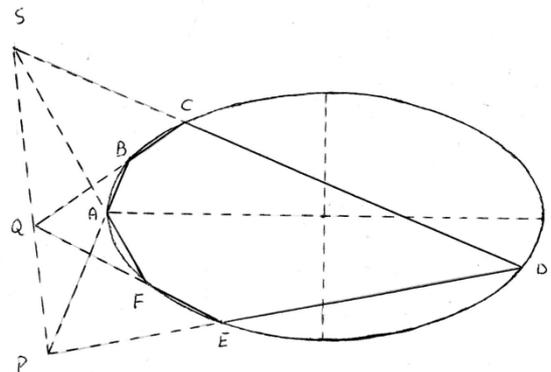


Fig. 39

Da questo teorema discende un corollario che permette di tracciare la tangente ad una conica in un suo punto. Considerato che la tangente ad una conica ha in comune con essa due punti coincidenti, enunciamo il corollario.

“ Se A, B, C, D≡E, F sono i vertici di un esagono degenere (in quanto due vertici sono coincidenti) inscritto in una conica, se Q è il punto di intersezione di BC con EF, S il punto di intersezione di AF con CD e P il punto di intersezione di AB con SQ, allora la retta PD è la retta tangente alla conica.” (vedi figura accanto relativo ad una circonferenza)

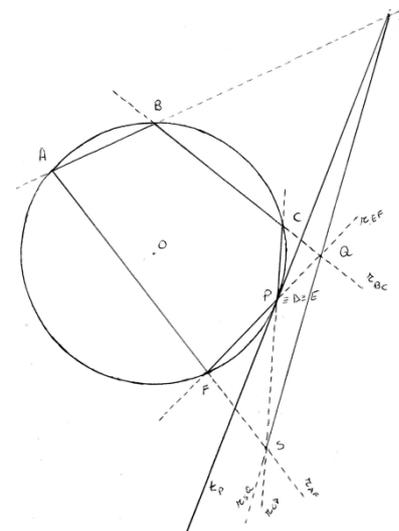


Fig. 40

Triangoli isoperimetrici

L'ellisse risolve uno dei problemi classici: cioè la ricerca dell'insieme dei triangoli isoperimetrici di lato assegnato. In fatti l'ellisse di fuochi gli estremi del lato assegnato $AB = 2c$ e asse principale $2a = 2p - 2c$, risolve tale problema: cioè il terzo vertice C è un punto dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(p-c)^2} + \frac{y^2}{p^2 - 2cp} = 1$$

4 CIRCONFERENZA

- Area del cerchio secondo Keplero

L'area del cerchio, secondo Keplero, viene considerata come la somma di infiniti triangoli mistilinei con centro nel centro del cerchio e base un arco infinitesimo di circonferenza che delimita il cerchio se con $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ indichiamo la misura degli archi infinitesimi e con r il raggio del cerchio, che coincide non solo con i lati dei diversi triangoli ma anche con l'altezza dei triangoli stessi possiamo affermare che l'area del cerchio è data da

$$\frac{1}{2}rb_1 + \frac{1}{2}rb_2 + \frac{1}{2}rb_3 + \dots + \frac{1}{2}rb_n + \dots = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots)$$

ma la somma $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 2\pi r$: cioè l'intera circonferenza, sostituendo e semplificando otteniamo

$$\frac{1}{2}rb_1 + \frac{1}{2}rb_2 + \frac{1}{2}rb_3 + \dots + \frac{1}{2}rb_n + \dots = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots) = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

Nel secondo capitolo abbiamo definito la circonferenza come il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro e la distanza è detta raggio. Tuttavia la tracciabilità di tale luogo negli "Elementi" di Euclide viene assunto come terzo postulato : " Si può sempre tracciare una circonferenza di centro e raggio assegnati ". Lungo la millenaria storia dellamatematica molti matematici hanno individuato altri tipi di luoghi geometrici che descrivevano circonferenze, qui ne diamo due fra i più significativi

- Circonferenza di Apollonio:

Luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante il rapporto K ($\in R_0^+$) delle distanze da due punti assegnati A e B dello stesso piano :

$$\frac{PA}{PB} = k.$$

Posto A origine del sistema cartesiano ed AB l'asse delle ascisse, si dimostra che l'equazione di detta circonferenza è :

$$x^2 + y^2 - \frac{2k^2a}{k^2 - 1}x + \frac{k^2a^2}{k^2 - 1} = 0$$

dove a è la distanza di A e B .

B) Luogo geometrico per i quali è costante la somma dei quadrati delle distanze da due punti assegnati siano A e B i punti assegnati, Sia M il punto medio di AB e sia il centro del sistema cartesiano e la retta sostegno di AB sia l'asse delle ascisse, si dimostra che l'equazione è

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{k}{2} = 0$$

dove a è la distanza di A e B .

- Posizione di una retta rispetto ad una circonferenza

Abbiamo già trattato la posizione di un punto rispetto ad una circonferenza, ora trattiamo la posizione di una retta rispetto ad una circonferenza. Dalla geometria elementare sono state date due definizioni equivalenti relative a tali posizioni

- 1a) Una retta si dice esterna quando non ha alcun punto in comune con la circonferenza
- 1b) Una retta si dice esterna se la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio
- 2a) Una retta si dice tangente quando ha in comune con la circonferenza uno ed un solo punto
- 2b) Una retta si dice tangente se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio
- 3a) Una retta si dice secante quando ha in comune con la circonferenza due suoi punti
- 3b) Una retta si dice secante se la sua distanza dal centro della circonferenza è minore del raggio

Da un punto di vista della geometria analitica, possiamo sfruttare queste due definizioni, impostando nel primo caso un sistema tra l'equazione della circonferenza e l'equazione della retta, poiché il sistema è di secondo grado, applicando il metodo della sostituzione l'equazione risolvente risulta di secondo grado:

- a1) Se il discriminante dell'equazione risolvente $\Delta < 0$, l'equazione non ammette radici reali e pertanto la retta è esterna
- a2) Se il discriminante dell'equazione risolvente $\Delta = 0$, l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti e pertanto la retta è tangente
- a3) Se il discriminante dell'equazione risolvente $\Delta > 0$, l'equazione ammette due radici reali e distinte e pertanto la retta è secante

Oppure data l'equazione della circonferenza, si determinano le coordinate del centro ed il raggio, successivamente si imposta una disequazione confrontando la distanza della retta dal centro della circonferenza con il raggio

- b1) Se $d(r, C) > r$, allora la retta è esterna
- b2) Se $d(r, C) = r$, allora la retta è tangente
- b3) Se $d(r, C) < r$, allora la retta è secante.

Per la ricerca della retta tangente passante per un punto del piano si presentano diversi casi

Intanto sia γ una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $P(x_p; y_p)$ un punto del piano di γ :

Se P è interno alla circonferenza, tutte le rette del fascio di centro P intersecano la circonferenza in due punti e pertanto sono secanti, quindi in questo caso da P non passa alcuna retta tangente.

Se P è sulla circonferenza, facendo il sistema tra l'equazione della circonferenza ed il fascio di rette di centro P si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = m(x - x_p) + y_p \end{cases}$$

Risolviendo ed annullando il discriminante $\Delta=0$ si ha per m una ed una sola soluzione, andando a sostituire tale soluzione nell'equazione del fascio si trova l'equazione della retta: pertanto per P passa una ed una sola retta tangente

Se P è esterno alla circonferenza, facendo il sistema tra l'equazione della circonferenza ed il fascio di rette di centro P si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = m(x - x_p) + y_p \end{cases}$$

Risolviendo si hanno per m due soluzioni reali e distinte in quanto il discriminante $\Delta > 0$, andando a sostituire tali soluzione nell'equazione del fascio si trovano le equazioni delle due rette: pertanto per P passano due rette tangenti

Un altro metodo per determinare la tangente ad una circonferenza, note le coordinate del centro e quelle del punto di tangenza, è quello di applicare la formula diretta

$$(x_p + \alpha)(x - x_p) + (y_p + \beta)(y - y_p) = 0$$

dove α e β sono le coordinate del centro della circonferenza e x_p e y_p sono le coordinate del punto di tangenza.

Un ulteriore metodo che abbiamo già trattato, note le coordinate del punto di tangenza, è quello dello sdoppiamento

Caso particolare:

Se una circonferenza passa per l'origine degli assi ($c = 0$) l'equazione della tangente alla circonferenza nell'origine si ottiene uguagliando a zero il gruppo dei termini di primo grado dell'equazione della circonferenza: $ax + by = 0$

- Angolo fra retta e circonferenza e tra due circonferenze, che si intersecano :

Def. 7) L'angolo di intersezione di una retta e di una circonferenza è l'angolo formato tra la retta e la retta tangente alla circonferenza nel loro punto di intersezione

Def. 8) L'angolo tra due circonferenze, che si intersecano in un punto, è l'angolo formato dalle due tangenti in detto punto.

Date le equazioni delle due circonferenze :

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Si dimostra che il valore dell'angolo ϑ tra due circonferenze, che si intersecano in un punto è

$$\cos \vartheta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 - 2(c_1 + c_2)}{4r_1r_2}$$

dove r_1 ed r_2 sono i raggi delle due circonferenze

Casi particolari:

-) Due circonferenze si tagliano ortogonalmente se $a_1a_2 + b_1b_2 - 2(c_1 + c_2) = 0$

-) Due circonferenze sono tangenti se $a_1a_2 + b_1b_2 - 2(c_1 + c_2) = \pm 4r_1r_2$: cioè $\cos \vartheta = \pm 1$. (+ tangenti internamente. - tangenti esternamente)

-) Se due circonferenze di centro C_1 e C_2 sono ortogonali le tangenti all'una, nei loro punti comuni, passano per il centro dell'altra e se r ed r_1 sono i loro raggi si ha:

$$\overline{C_1 C_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$$

Cioè $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$ con $C_1(\alpha_1; \beta_1)$ e $C_2(\alpha_2; \beta_2)$.

Questo teorema vale per tutti i tipi di conica

Teorema 6 (di Poncelet): Il segmento di tangente variabile ad un conica, compreso tra due tangenti

fisse , è visto da un fuoco sotto un angolo costante.

Qui di seguito diamo alcune circonferenze di significativo pregio geometrico

Circonferenza dei nove punti o di Feuerbach:

Se ABC sono i vertici di un triangolo, allora i punti medi dei lati, i piedi delle altezze ed i punti medi dei segmenti compresi fra l'ortocentro e i rispettivi vertici del triangolo giacciono sulla stessa circonferenza.

Riferito il triangolo ad un sistema cartesiano ortogonale: $A(\alpha; 0)$, $B(\beta; 0)$ e $C(0; \gamma)$, l'equazione della circonferenza passante per i nove punti è :

$$x^2 + y^2 - \frac{\alpha + \beta}{2}x - \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{2\gamma}y = 0$$

Proprietà:

1) La retta sostegno dell'ortocentro ed il centro di detta circonferenza è la retta di Eulero: retta passante per il baricentro, il circocentro e l'ortocentro del triangolo ABC

2) Il punto medio del segmento di estremi l'ortocentro ed il circocentro del triangolo ABC coincide con il centro di detta circonferenza ed il raggio di questa è la metà del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo

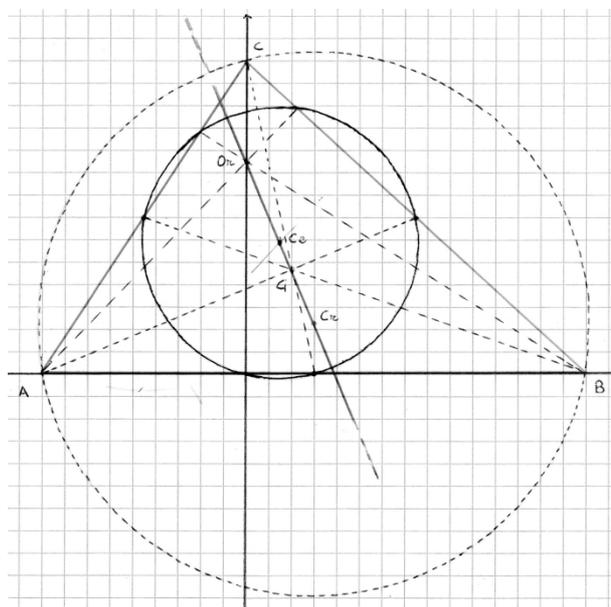


Fig . 41

Una delle applicazioni della circonferenza di *Feuerbach* sta nella ricerca dei poligoni regolari col semplice uso di riga e compasso.

Si traccia un triangolo isoscele con l'angolo al vertice uguale a quello dell'angolo al centro che sottende il lato del poligono regolare:

-) Se il triangolo è sempre isoscele con l'angolo al vertice di 36° la circonferenza di Feuerbach determina un pentagono regolare coi cinque vertici sui lati

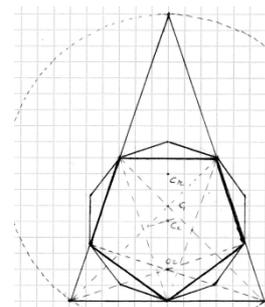


Fig. 42

-) Se il triangolo è equilatero la circonferenza di *Feuerbach* passa per 6 punti: infatti i piedi delle altezze ed i punti medi dei lati relativi sono coincidenti , tali punti determinano l'esagono regolare con tre vertici sui lati del triangolo

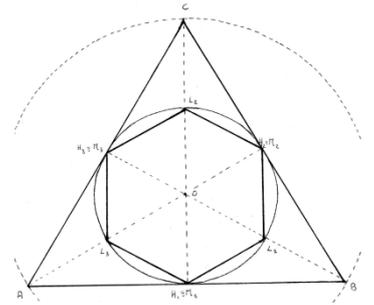


Fig. 43

-) Se il triangolo è isoscele con l'angolo al vertice uguale a $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$ la circonferenza di Feuerbach determina un eptagono regolare con cinque vertici sui lati e due sui punti medi degli archi esterni al triangolo.

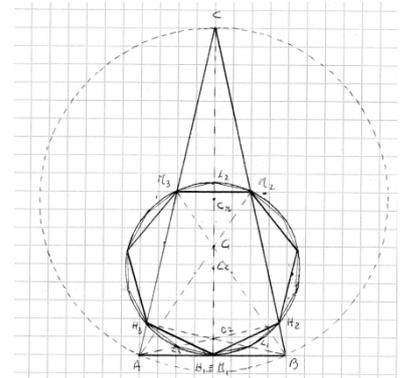


Fig. 44

-) Se il triangolo è sempre isoscele con l'angolo al vertice di 45° la circonferenza di Feuerbach determina un ottagono regolare con cinque vertici sui lati e gli altri tre nei punti medi degli archi interni al triangolo.

... e così di seguito.

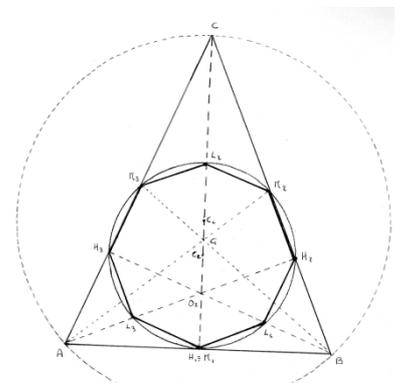


Fig. 45

Circonferenza di Mathieu

Se una circonferenza taglia i lati di un triangolo ABC nelle proiezioni E, F, G di un punto P interno ad ABC, essa li taglia ancora nelle proiezioni E', F', G' di un altro punto P' interno, simmetrico di P rispetto al centro della stessa circonferenza.

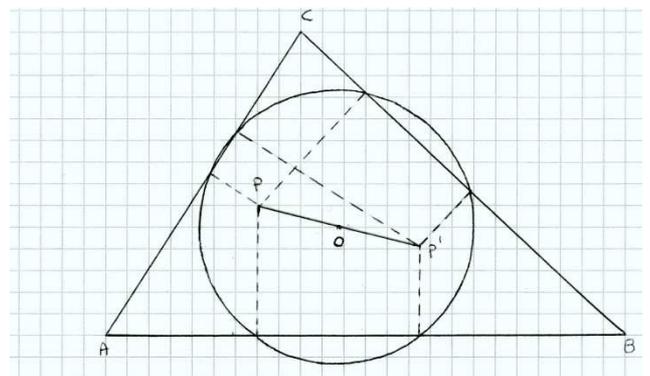


Fig. 46

5 APPENDICE

Sul concetto di diametro di una conica

Il concetto di diametro nella storia della matematica ha avuto uno sviluppo significativo, come d'altronde appare chiaro quando abbiamo richiamato elementi di Geometria Proiettiva: infatti è proprio in quel contesto teorico che esso riveste un ruolo fondamentale. Partiamo dunque dal suo contesto originario: la Geometria euclidea.

Si chiama *corda* di una circonferenza o in generale di una figura piana convessa ogni segmento che abbia gli estremi sulla circonferenza o sul contorno della figura.

Se la figura, come la circonferenza, ammette un centro di simmetria, allora la corda passante per tale centro si chiama *diametro*.

Le rette sostegno di tali diametri sono dette *rette diametrali*.

Oltre alle circonferenze si parla di diametri nei parallelogrammi, nei poligoni regolari

Nella circonferenza valgono i seguenti teoremi:

- “ Il diametro di una circonferenza è la corda massima”
- “ Tutti i diametri di una circonferenza sono congruenti”
- “ Un diametro divide la cerchio in parti congruenti”

Nel parallelogrammo valgono i seguenti teoremi:

- “ Tutti i diametri di un parallelogrammo sono diseguali, le loro lunghezze sono comprese tra le lunghezze delle due diagonali “
- “ Un diametro di un parallelogrammo divide il parallelogrammo in figure congruenti”

In Stereometria si parla di diametro nelle sfere e nel parallelepipedo con la stessa accezione data nel piano.

Sarà Apollonio che svilupperà il concetto di diametro alle Coniche: infatti tale estensione farà dire al matematico che nessuno prima di lui aveva studiato in modo nuovo e completo le proprietà delle coniche. Questi introduce per la prima volta il concetto di diametro coniugato ad un diametro

II

assegnato. Nella circonferenza il diametro coniugato è il diametro perpendicolare a quello assegnato: infatti dovendo verificare la relazione, come abbiamo visto nel capitolo IV,

$$Cmm' + \frac{B}{2}(m + m') + A = 0$$

Poiché nella circonferenza $C = A$ e $B = 0$, discende che $m' = -\frac{1}{m}$, che non è altro che la condizione di perpendicolarità.

Se da una parte è parso semplice ad Apollonio estendere all'ellisse il concetto di diametro come il segmento passante per il suo centro ed avente gli estremi sul contorno dell'ellisse, alquanto arduo è apparso estendere tale concetto alla parabola e all'iperbole. Infatti nell'ellisse tale concetto conserva ancora le prerogative della definizione data a proposito della circonferenza, con la differenza che i diametri dell'ellisse sono congruenti a coppie: cioè i diametri simmetrici agli assi sono congruenti

fra loro ma sono diversi con gli altri. Per individuare il diametro coniugato di un diametro assegnato Apollonio estende la proprietà della circonferenza e del parallelogrammo: il fascio di corde parallele di una circonferenza o di un parallelogrammo ammette uno ed un solo diametro che passa per i punti medi delle corde del fascio. Pertanto egli considera la corda del fascio di corde parallele dell'ellisse che passa per il centro come diametro assegnato e il diametro passante per i punti medi delle corde come diametro coniugato. Così risolve elegantemente l'attribuzione di diametro coniugato nell'ellisse, dando anche la regola geometrica per determinarlo. Nella figura 46) AB è il diametro assegnato, mentre CD è il diametro coniugato di AB . E' chiaro che se si tracciano le corde parallele ad CD , il diametro AB passa per i punti medi di tali corde e pertanto AB è il diametro coniugato di CD . Come nella circonferenza e nel parallelogrammo anche in questo contesto la lunghezza dei diametri è finita.

Apollonio chiama diametro di una parabola la semiretta, avente l'origine sul contorno di essa e che passa per i punti medi delle corde parallele della parabola. Egli dimostra che tale semiretta è parallela all'asse della parabola. E' chiaro che ad ogni fascio di corde parallele corrisponde un determinato diametro. Tutti i diametri sono congruenti fra loro e sono tra loro paralleli.

La parabola non ha un centro e quindi in questo contesto cade una delle prerogative della definizione di diametro data nella circonferenza, nel parallelogrammo e così pure nell'ellisse. Tale mancanza sarà recuperata in seguito dalla geometria proiettiva dove si afferma che la parabola come le altre coniche ha un centro e due fuochi solo che essa ammette un fuoco e il centro in un punto all'infinito e precisamente nel punto improprio della parabola: cioè nella direzione dell'asse della parabola. Nella figura accanto la semiretta di origine A è un diametro della parabola in quanto passa per i punti medi delle corde parallele.

La lunghezza dei diametri di una parabola è infinita.

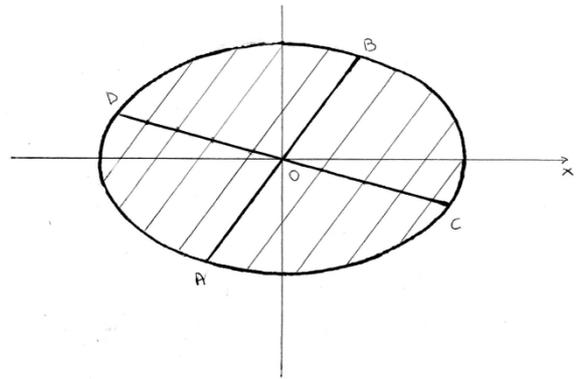


Fig. 47

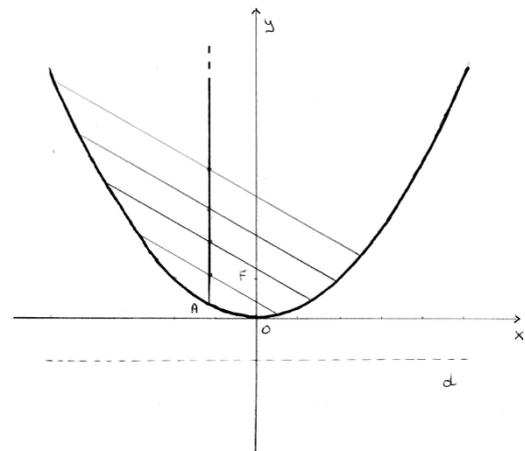


Fig. 48

Relativamente all'iperbole egli considera le quattro regioni del piano individuate dagli asintoti. Le rette, che costituiscono gli angoli opposti, formati dagli asintoti e contenenti l'asse trasverso dell'iperbole, sono rette diametrali; e, le corde intercettate su di esse dai rami di iperbole sono diametri. Le rette, che costituiscono gli angoli opposti, formati dagli asintoti e contenenti l'asse non trasverso o secondario dell'iperbole, sono dette ancora rette diametrali nell'accezione che andiamo a determinare. Infatti fissata una retta diametrale e di conseguenza il diametro da essa intercettato sull'iperbole e tracciate le tangenti all'iperbole agli estremi del diametro, queste intersecano gli asintoti in quattro punti a due a due simmetrici rispetto al centro dell'iperbole. Questi quattro punti, unendoli con un poligonale, determinano un parallelogrammo. Se dal centro del parallelogrammo si

conduce una retta parallela alle tangenti sopra dette, tale retta è univocamente determinata ed è una retta diametrale per il parallelogrammo. Pertanto, essendo tale retta connessa alla retta diametrale fissata dell'iperbole, essa è detta retta diametrale coniugata a tale retta. Il segmento della retta diametrale coniugata intercettato su di essa dal parallelogrammo è il diametro coniugato al diametro intercettato dalla retta diametrale fissata.

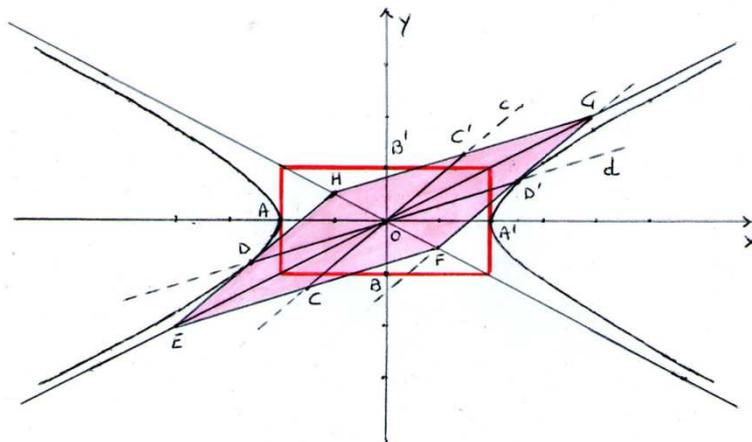


Fig. 49

Pertanto anche per l'iperbole come per l'ellisse si parla di diametri e diametri coniugati, le cui lunghezze sono finite. Nella figura d è la retta diametrale fissata, DD' il diametro da questa determinato sull'iperbole, c la retta diametrale coniugata a d e CC' il diametro coniugato. Possiamo ora estendere all'iperbole il Teorema di Apollonio già dato per l'ellisse a pag 215: “ Tutti i parallelogrammi aventi come diagonali due diametri coniugati di un'iperbole sono equivalenti fra loro “

Anzi possiamo affermare in generale la proposizione:

“ Data una conica a centro, i parallelogrammi aventi come vertici gli estremi di due diametri coniugati sono tutti fra loro equivalenti

Si dimostra che l'area di tali parallelogrammi è uguale all'area del rombo avente come diagonali gli assi della conica. Diamo qui un'indicazione grafica:

Il parallelogrammo $DCD'C'$ è equivalente al rombo $ABA'B'$ sia nell'ellisse quanto nell'iperbole.

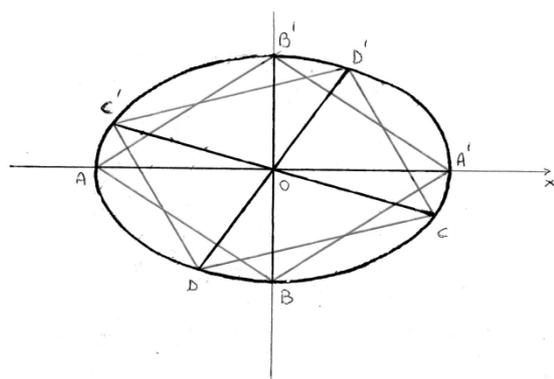


Fig. 40

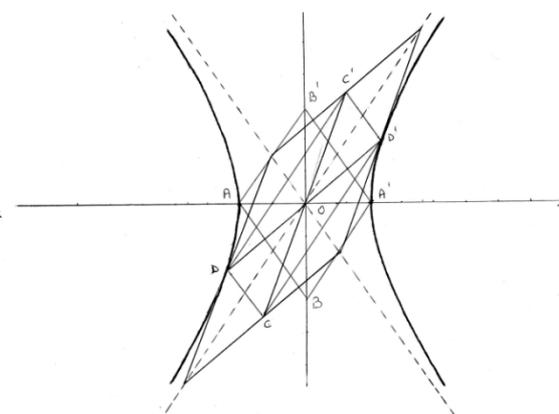


Fig. 51

Verifichiamo analiticamente la proposizione enunciata nel caso dell'iperbole, analogo procedimento vale per l'ellisse.

Sia data l'equazione dell'iperbole in forma canonica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sia $D'(\bar{x}, \bar{y})$ un punto

dell'iperbole: cioè $b^2\bar{x}^2 - a^2\bar{y}^2 = a^2b^2$. Siano $s_1: y = \frac{b}{a}x$ e $s_2: y = -\frac{b}{a}x$ gli asintoti

dell'iperbole. Sia $t_1: \frac{\bar{x} \cdot x}{a^2} - \frac{\bar{y} \cdot y}{b^2} = 1$, la retta tangente all'iperbole in D' . Sia r la retta parallela a t_1

passante per il centro O dell'iperbole, la cui equazione è $y = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}x$. Sia $D(-\bar{x}, -\bar{y})$ il punto

simmetrico di D' rispetto al centro O, sia $d: y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}x$ la retta passante per D e D' .

Sia E il punto di intersezione della retta t_1 con l'asintoto s_1 , le cui coordinate sono date dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x} \cdot x}{a^2} - \frac{\bar{y} \cdot y}{b^2} = 1 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2b}{b\bar{x} - a\bar{y}} \\ y = \frac{ab^2}{b\bar{x} - a\bar{y}} \end{cases}$$

Sia d_1 la retta passante per E e parallela alla retta d , la cui equazione è

$$y - \frac{ab^2}{b\bar{x} - a\bar{y}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \left(x - \frac{a^2b}{b\bar{x} - a\bar{y}} \right)$$

Sia C' il punto di intersezione della retta d_1 e la retta r , le cui coordinate sono date dal sistema:

$$\begin{cases} y - \frac{ab^2}{b\bar{x} - a\bar{y}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \left(x - \frac{a^2b}{b\bar{x} - a\bar{y}} \right) \\ y = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}x - \frac{ab^2}{b\bar{x} - a\bar{y}} \right) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \left(x - \frac{a^2b}{b\bar{x} - a\bar{y}} \right) \\ y = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) x = \frac{ab^2}{b\bar{x} - a\bar{y}} - \frac{a^2b\bar{y}}{\bar{x}(b\bar{x} - a\bar{y})} \\ y = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2\bar{x}\bar{y}}x = \frac{ab(b\bar{x} - a\bar{y})}{\bar{x}(b\bar{x} - a\bar{y})} \\ y = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{a\bar{y}}{b} \\ y = \frac{b\bar{x}}{a} \end{cases}$$

L'area del parallelogrammo $DCD'C'$ è due volta l'area del triangolo $DD'C'$ e pertanto essa è uguale a

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \frac{a\bar{y}}{b} & \frac{b\bar{x}}{a} & 1 \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ -\bar{x} & -\bar{y} & 1 \end{vmatrix} = \left| \frac{a\bar{y}^2}{b} - \frac{bx^2}{a} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \frac{a\bar{y}^2}{b} - \frac{bx^2}{a} \right| = \frac{2(b^2\bar{x}^2 - a^2\bar{y}^2)}{ab} = \frac{2a^2b^2}{ab} = 2ab$$

L'area del rombo $ABA'B'$ è data da $\frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{BB'} = \frac{1}{2}(2a)(2b) = 2ab$

Vista l'arbitrarietà della scelta del punto D' , l'area del parallelogrammo vale per qualsiasi punto e di conseguenza per qualsiasi coppia di diametri coniugati relativi ai punti scelti.

MISCELLANEA

-) FASCIO DI CONICHE,
-) LUOGHI GEOMETRICI CONNESSI CON LE CONICHE
-) CURVE DEDUCIBILI DALLE CONICHE
-) TRASFORMAZIONE DEL PIANO IN SE' : Inversione circolare.

1 FASCIO DI CONICHE

- Caratteri generali:

Dalla geometria elementare il concetto di fascio viene definito a livello di insiemi di rette, distinguendo due casi:

-) se le rette dell'insieme hanno un punto P in comune o che passano per lo stesso punto P si dice fascio proprio di centro o punto base P ,
-) se le rette dell'insieme non hanno alcun punto in comune o che sono parallele tra loro si dice che il fascio è improprio o che hanno la medesima direzione (detta nel piano ampliato punto improprio).

Dalla geometria analitica l'equazione di una retta è $ax + by + c = 0$, che è un'equazione indeterminata di primo grado a due variabili x ed y con a, b, c valori numerici determinati. L'equazione del fascio invece ha sempre la forma della retta solo che i valori a o b o c dipendono da un parametro k , al variare del quale si individuano le equazioni delle infinite rette del fascio. Se è solo il termine noto c dipendente dal parametro k , allora si dice che il fascio di rette è improprio: cioè le rette sono parallele; se invece a o b dipendono da k , si dice che il fascio è proprio: cioè tutte le rette del fascio, determinate dalla variazione di k , passano per uno stesso punto.

Sempre dalla geometria analitica sappiamo che per determinare le coordinate di un punto del piano dobbiamo mettere a sistema le equazioni di due rette. Questa considerazione discende direttamente dalla geometria elementare: due rette di un piano o si intersecano o sono parallele. Mettendo a sistema le equazioni di due rette si ottiene algebricamente un sistema di primo grado, che può essere possibile o impossibile. Nel caso possibile può essere determinato: cioè ammette una sola soluzione, o indeterminato: ammette infinite soluzioni, nel caso dell'impossibilità non ammettono soluzioni.

Nel caso possibile e determinato in geometria analitica si afferma che le rette si intersecano in un punto proprio, nel caso possibile ed indeterminato si afferma che le rette sono sovrapposte o coincidenti, nel caso dell'impossibilità si afferma che le rette sono parallele. Tolto il caso delle rette coincidenti, che in altri termini sono la stessa retta, restano solo due casi: rette incidenti e rette parallele.

Un metodo per individuare l'equazione di un fascio di rette sta nel fare una combinazione lineare di due qualunque rette particolari del fascio:

es. Fascio proprio: Siano $x + 2y + 3 = 0$ e $3x - 4y + 2 = 0$ due rette particolari, l'equazione del fascio è

$$(x + 2y + 3) + k(3x - 4y + 2) = 0$$

Da cui

$$(1 + 3k)x + (2 - 4k)y + (3 + 2k) = 0$$

Poiché il parametro k figura nei coefficienti della x e della y , che risultano diversi qualunque sia il valore di k , il fascio risulta un fascio proprio il cui centro è $P\left(-\frac{8}{5}; -\frac{7}{10}\right)$.

Es. Fascio improprio: Siano $4x - 2y + 5 = 0$ e $2x - y + 3 = 0$ due rette particolari, l'equazione del fascio è

$$(4x - 2y + 5) + k(2x - y + 3) = 0$$

Da cui $(4 + 2k)x - (2 + k)y + (5 + 3k) = 0$

Raccogliendo il 2 nel coefficiente della x e dividendo ogni monomio del primo membro per $2+k$

Si ha $2x - y + \frac{5+3k}{2+k} = 0$

Poiché il parametro k figura solo a termine noto si tratta di un fascio improprio: cioè di rette parallele di coefficiente angolare $m = 2$.

L'analisi algebrica della risoluzione di un sistema di primo grado ci permette di individuare due situazioni per il fascio di rette.

Se estendiamo tale ragionamento al caso delle coniche sia da un punto di vista della geometria elementare che della geometria analitica, in quest'ultimo caso la risoluzione di un sistema di equazioni (nel caso specifico di due equazioni di secondo grado) ci permette di determinare le posizioni reciproche di due coniche, ricordando il Teorema fondamentale dell'algebra e il teorema di Bezout: il primo afferma:

- **Teorema** “Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ammette una radice complessa”

Corollario “Ogni polinomio di grado n ammette nel campo complesso n radici, contate con la loro molteplicità”;

il secondo afferma

- **Teorema** “Due curve algebriche di grado m ed n si intersecano in $m \cdot n$ punti”

- **Intersezione di due coniche**

Pertanto se intersechiamo due coniche allora esse hanno al più quattro punti reali (in generale sempre quattro punti che possono essere reali o immaginari). Quindi si possono presentare cinque casi:

- 1) Le due coniche non hanno alcun punto in comune
- 2) Le due coniche hanno un punto in comune
- 3) Le due coniche hanno due punti in comune
- 4) Le due coniche hanno tre punti in comune
- 5) Le due coniche hanno quattro punti in comune

Nel caso che hanno 5 punti in comune le due coniche coincidono e a meno di un fattore di proporzionalità le due coniche sono coincidenti: questa situazione permette di determinare una particolare conica del piano, basta imporre il passaggio per 5 punti distinti del piano.

L'equazione generale di una conica è, come abbiamo dimostrato nel III Cap.,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Che risulta un'equazione completa di secondo grado nelle variabili x ed y , nella quale compaiono sei coefficienti A, B, C, D, E, F e come nell'equazione della retta i coefficienti a, b, c sono tre, tali coefficienti non sono linearmente indipendenti: infatti nel caso delle coniche posto $A \neq 0$, dividendo ogni monomio del primo membro per A si ha

$$x^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Posto $b = \frac{B}{A}$; $c = \frac{C}{A}$; $d = \frac{D}{A}$; $e = \frac{E}{A}$; $f = \frac{F}{A}$, e sostituendo si ha

$$x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Scritta la conica in questa forma, i suoi coefficienti risultano indipendenti e pertanto per determinare una particolare conica è necessario assegnare cinque condizioni linearmente indipendenti: cioè cinque punti: come d'altronde avviene nella retta, infatti data l'equazione della retta $ax + by + c = 0$ posto $b \neq 0$ e dividendo ogni monomio del primo membro per b si ha

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0; \text{ sostituendo } a' = \frac{a}{b} \text{ e } c' = \frac{c}{b}, \text{ si ha } a'x + y + c' = 0.$$

Anche in questo contesto i coefficienti risultano indipendenti e per determinare una particolare retta occorrono due condizioni linearmente indipendenti: cioè due punti.

Assegnati per le coniche 5 punti del piano, linearmente indipendenti, per essi passa una ed una sola conica del piano, definita ameno di un fattore di proporzionalità non nullo, come abbiamo detto sopra. Se vengono assegnati un numero minore di punti, avremo un fascio di coniche.

Come il fascio di rette, anche il fascio di coniche è individuato dalla combinazione lineare di due coniche, che vengono dette generatrici del fascio.

Per individuare i punti di intersezione delle due coniche generatrici è necessario porre a sistema le loro equazioni. Tale sistema, essendo costituito da due equazioni di secondo grado, risulta di quarto grado e pertanto ammette quattro coppie di valori: ogni coppia individua un punto del piano cartesiano a cui sono riferite le due coniche. L'equazione del fascio al variare di k rappresenta una conica passante per i quattro punti comuni alle due coniche generatrici: ora quattro punti non allineati determinano un quadrilatero piano completo le cui coppie di lati opposti danno le tre *coniche degeneri* del fascio (che corrispondono ai valori di k per i quali si annulla la matrice cubica associata all'equazione del fascio). I punti base che chiamiamo M, N, K, P possono assumere posizioni particolari:

- 1) Le coniche si intersecano in quattro punti M, N, P, Q distinti
- 2) Le coniche si intersecano in quattro punti di cui due coincidenti: $M = N, P, Q$, in questo caso le coniche sono tangenti nel punto comune
- 3) Le coniche si intersecano in quattro punti a due a due coincidenti $M = N$ e $P = Q$ con $M \neq P$, in questo caso le due coniche sono bi tangenti

- 4) Le coniche si intersecano in quattro punti di cui tre coincidenti $M = N = P$ e $M \neq Q$, in questo caso le coniche hanno un contatto tripunto: cioè sono tangenti e si attraversano nel punto coincidente.
- 5) Le coniche si intersecano in quattro punti tutte e quattro coincidenti $M=N=P=Q$, le coniche sono tangenti con un contatto quadruplo

La conoscenza a priori di questi punti base con le loro reciproche posizioni permette di individuare le coniche degeneri presenti nel fascio e quindi di sfruttarle per determinare mediante opportune composizioni l'equazione del fascio di coniche. Così riferendoci alla successione dei punti si ha che nel caso

- 1) Le coniche spezzate o degeneri sono tre e precisamente sono le tre coppie di rette che è possibile costruire: $r_1(M, N)$, $r_2(M, P)$, $r_3(M, Q)$, $r_4(N, P)$, $r_5(N, Q)$, $r_6(P, Q)$.

Una possibile combinazione potrebbe essere

$$r_1 \cdot r_6 + k r_2 \cdot r_5 = 0$$

- 2) Le coniche spezzate o degeneri sono due e precisamente la retta tangente $t(M)$ con $r_1(P, Q)$ e $r_2(M, P)$ con $r_3(M, Q)$

La combinazione è

$$t \cdot r_1 + k r_2 \cdot r_3 = 0$$

- 3) Le coniche spezzate o degeneri sono due e precisamente la $t_1(M)$ con $t_2(P)$ e la retta $r(M, P)$ contata due volte.

La combinazione è

$$t_1 \cdot t_2 + k(r)^2 = 0$$

- 4) Le coniche spezzate è una e precisamente la $t(M)$ contata due volte, la retta $r(M, Q)$ serve di appoggio.

La combinazione è

$$(t)^2 + k t \cdot r = 0$$

- 5) Le coniche del fascio presentano una sola conica degeneri nella retta tangente in $t(M)$ contata due volte:

La

combinazione

è

$$f(x, y) + k(t)^2 = 0$$

Con $f(x, y)$ l'equazione della conica particolare del fascio nota che ha un contatto quadruplo con la tangente t in M .

Per ogni caso facciamo un esempio:

- 1) Determinare il fascio di coniche passanti per i punti $M(0; 3)$, $N(4; 0)$, $P(0; -3)$ e $Q(-2; 0)$ e calcolare i valori del parametro k combinatorio per cui le coniche del fascio siano ellissi, iperboli o parabole.

Risoluzione

Consideriamo due coppie di rette, che si possono formare coi quattro punti: e, precisamente

$$r_1(M; N) \equiv 3x + 4y - 12 = 0 \quad ; \quad r_6(P; Q) \equiv 3x + 2y + 6 = 0$$

$$r_3(M; Q) \equiv 3x - 2y + 6 = 0 \quad ; \quad r_4(N; P) \equiv 3x - 4y - 12 = 0$$

Siano $\Gamma_1 \equiv (3x + 4y - 12)(3x + 2y + 6) = 0 \rightarrow 9x^2 + 18xy + 8y^2 - 18x - 72 = 0$
 e $\Gamma_2 \equiv (3x - 2y + 6)(3x - 4y - 12) = 0 \rightarrow 9x^2 - 18xy + 8y^2 - 18x - 72 = 0$ le due

coniche spezzate o degeneri ; operiamo una composizione lineare fra queste ed otteniamo il fascio di coniche:

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k \Gamma_2 = (9x^2 + 18xy + 8y^2 - 18x - 72) + k(9x^2 - 18xy + 8y^2 - 18x - 72) = 0$$

Da cui moltiplicando e raccogliendo si ha l'equazione normale del fascio di coniche

$$9(k+1)x^2 + 18(1-k)xy + 8(1+k)y^2 - 18(1+k)x - 72(1+k) = 0$$

Discutiamo la natura delle coniche, studiando il discriminante del trinomio di secondo grado:

- Se $\frac{\Delta}{4} > 0$: $81(1-k)^2 - 72(1+k)^2 > 0$, cioè $k < 17 - 12\sqrt{2} \cup k > 17 + 12\sqrt{2}$, allora le coniche del fascio sono delle iperboli
- Se $\frac{\Delta}{4} < 0$: $81(1-k)^2 - 72(1+k)^2 < 0$, cioè $17 - 12\sqrt{2} < k < 17 + 12\sqrt{2}$, allora le coniche del fascio sono delle ellissi
- Se $\frac{\Delta}{4} = 0$: $81(1-k)^2 - 72(1+k)^2 = 0$, cioè $k = 17 - 12\sqrt{2} \cup k = 17 + 12\sqrt{2}$, allora le coniche del fascio sono delle parabole.

- 2) Determinare l'equazione del fascio di coniche tangenti in $M(0; 2)$ alla retta $t \equiv x - 2y + 4 = 0$ e passante per $P(3; 0)$ e $Q(0; -3)$.

Risoluzione

Consideriamo le tre rette

$$r_1(M; P) \equiv 2x + 3y - 6 = 0 \quad ; \quad r_6(P; Q) \equiv x - y - 3 = 0 \quad ; \quad r_3(M; Q) \equiv x = 0 \quad ;$$

Siano $\Gamma_1 \equiv (x - 2y + 4)(x - y - 3) = 0 \rightarrow x^2 - 3xy + 2y^2 + x + 2y - 12 = 0$
 e $\Gamma_2 \equiv x(2x + 3y - 6) = 0 \rightarrow 2x^2 + 3xy - 6x = 0$ le due coniche spezzate o degeneri ;

operiamo una composizione lineare fra queste ed otteniamo il fascio di coniche:

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k \Gamma_2 = (x^2 - 3xy + 2y^2 + x + 2y - 12) + k(2x^2 + 3xy - 6x) = 0$$

Da cui moltiplicando e raccogliendo si ha l'equazione normale del fascio di coniche

$$(1 + 2k)x^2 + 3(k - 1)xy + 2y^2 + (1 - 6k)x + 2y - 12 = 0$$

Discutiamo la natura delle coniche, studiando il discriminante del trinomio di secondo grado:

- Se $\Delta > 0$: $9(k-1)^2 - 8(1+2k) > 0$, cioè $k < \frac{17-2\sqrt{70}}{9} \cup k > \frac{17+2\sqrt{70}}{9}$, allora le coniche del fascio sono delle iperboli

- Se $\Delta < 0 : 9(k-1)^2 - 8(1+2k) < 0$, cioè $\frac{17-2\sqrt{70}}{9} < k < \frac{17+2\sqrt{70}}{9}$,
allora le coniche del fascio sono delle ellissi
- Se $\Delta = 0 : 9(k-1)^2 - 8(1+2k) = 0$, cioè $k = \frac{17-2\sqrt{70}}{9}$ o $k = \frac{17+2\sqrt{70}}{9}$,
allora le coniche del fascio sono delle parabole.

- 3) Determinare l'equazione del fascio di coniche tangenti in $M(0; 4)$ alla retta $t_1 \equiv 2x - y + 4 = 0$ e tangenti in $P(6; 0)$ alla retta $t_2 \equiv x - 2y - 6 = 0$.

Risoluzione

Consideriamo la retta $r(M; P) \equiv 2x + 3y - 12 = 0$

Siano $\Gamma_1 \equiv (x - 2y - 6)(2x - y + 4) = 0 \rightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 - 8x - 2y - 24 = 0$

e $\Gamma_2 \equiv (2x + 3y - 12)^2 = 0 \rightarrow 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 48x - 72y + 144 = 0$ le due coniche spezzate o degeneri.

Operiamo una composizione lineare fra queste ed otteniamo il fascio di coniche:

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k\Gamma_2 = (2x^2 - 5xy + 2y^2 - 8x - 2y - 24) + k(4x^2 + 12xy + 9y^2 - 48x - 72y + 144) = 0$$

Da cui moltiplicando e raccogliendo si ha l'equazione normale del fascio di coniche

$$2(1+2k)x^2 + (12k-5)xy + (2+9k)y^2 - 8(1+6k)x - 2(1+36k)y + (144k-24) = 0$$

Discutiamo la natura delle coniche, studiando il discriminante del trinomio di secondo grado:

- Se $\Delta > 0 : (12k-5)^2 - 8(1+2k)(2+9k) > 0$, cioè $k < \frac{9}{224}$
allora le coniche del fascio sono delle iperboli
- Se $\Delta < 0 : (12k-5)^2 - 8(1+2k)(2+9k) < 0$, cioè $k > \frac{9}{224}$,
allora le coniche del fascio sono delle ellissi
- Se $\Delta = 0 : (12k-5)^2 - 8(1+2k)(2+9k) = 0$, cioè $k = \frac{9}{224}$,
allora le coniche del fascio si riduce ad una sola parabola.

- 4) Determinare l'equazione del fascio di coniche che hanno un contatto tripunto in $M(3; 0)$ di cui $t \equiv 3x - y - 9 = 0$ è la retta tangente in M , ed inoltre passano per il punto $Q(0; 5)$.

Risoluzione

Consideriamo la retta $r(M; Q) \equiv 5x + 3y - 15 = 0$

Siano $\Gamma_1 \equiv (3x - y - 9)^2 = 0 \rightarrow 9x^2 - 6xy + y^2 - 54x + 18y + 81 = 0$

e $\Gamma_2 \equiv (3x - y - 9)(5x + 3y - 15) = 0 \rightarrow 15x^2 + 4xy - 3y^2 - 90x - 12y + 135 = 0$

le due coniche spezzate o degeneri .

Operiamo una composizione lineare fra queste ed otteniamo il fascio di coniche:

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k \Gamma_2 = (9x^2 - 6xy + y^2 - 54x + 18y + 81) + \\ + k (15x^2 + 4xy - 3y^2 - 90x - 12y + 135) = 0$$

Da cui moltiplicando e raccogliendo si ha l'equazione normale del fascio di coniche

$$3(3 + 5k)x^2 - 2(3 - 2k)xy + (1 - 3k)y^2 - 18(3 + 5k)x + 6(3 - 2k)y + 27(3 + 5k) = 0$$

Discutiamo la natura delle coniche, studiando il discriminante del trinomio di secondo grado:

$$- \text{Se } \frac{\Delta}{4} > 0 : (3 - 2k)^2 - 3(1 - 3k)(3 + 5k) > 0 , \text{ comunque sia } k$$

le coniche del fascio sono delle iperboli non sono presenti altri tipi di coniche

- 5) Determinare il fascio di coniche che in $M(4; 0)$ hanno un contatto quadripunto con la circonferenza $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Risoluzione

Consideriamo la retta tangente in M alla circonferenza : $x = 4$

$$\text{Sia } \Gamma_1 \equiv (x - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

L'unica conica spezzata o degenera.

Operiamo una composizione lineare fra questa e la circonferenza otteniamo il fascio di coniche:

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k = x^2 + y^2 - 4x + k(x^2 - 8x + 16) = 0$$

Da cui moltiplicando e raccogliendo si ha l'equazione normale del fascio di coniche

$$(1 + k)x^2 + y^2 - 4(1 + 2k)x + 16k = 0$$

Discutiamo la natura delle coniche, studiando il discriminante del trinomio di secondo grado:

$$- \text{Se } \Delta > 0 : -4(1 + k) > 0 , \text{ cioè } k < -1$$

allora le coniche del fascio sono delle iperboli

$$- \text{Se } \Delta < 0 : -4(1 + k) < 0 , \text{ cioè } k > -1 ,$$

allora le coniche del fascio sono delle ellissi

$$- \text{Se } \Delta = 0 : -4(1 + k) = 0 , \text{ cioè } k = -1 ,$$

allora le coniche del fascio si riduce ad una sola parabola.

- 6) Determinare l'equazione della conica passante per l'origine $O(0; 0)$ e per il punto $A(1; -1)$ e che presenta in A un contatto quadri punto con la circonferenza

$$x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$$

Risoluzione

La retta tangente in A alla circonferenza, mediante la regola dello sdoppiamento è

$$1x - 1y - \frac{1}{2}2(x + 1) + \frac{1}{2}(y - 1) + 1 = 0$$

$$y + 1 = 0$$

Il fascio di coniche è dato da:

$$x^2 + y^2 - 2x + y + 1 + k(y + 1) = 0$$

Imposto il passaggio per l'origine: $k = -1$, sostituendo nel fascio si ha la conica richiesta

$$x^2 - 2x - y = 0$$

Che risulta una parabola con vertice in A. La circonferenza è la circonferenza osculatrice in A. L'inverso del suo raggio ($r = \frac{1}{2}$) è il valore della curvatura della parabola nel suo vertice (che nel caso è 2).

Osservazione. Il contatto quadripunto di una curva con una circonferenza ci permette di individuare il valore della curvatura della curva nel punto di contatto. (questo argomento è trattato dall'Analisi Matematica, qui lo diamo per inciso) Si definisce curvatura in un punto P di una curva piana regolare, la cui funzione è almeno due volte derivabile, il limite del rapporto tra l'ampiezza dell'angolo ϑ , formato da due tangenti alla curva una in P e l'altra in un punto Q appartenente alla curva prossimo a P, e la lunghezza dell'arco di curva compreso tra P e Q: $c_r(P) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{|\vartheta(P,Q)|}{l(P;Q)}$

Se la curva è il grafico di $y = f(x)$ con $f(x)$ almeno due volte derivabile in P, allora si dimostra che

$$c_r(P) = \frac{|y''_P(x)|}{\sqrt{[1 + (y'_P(x))^2]^3}}$$

L'inverso del valore della curvatura $c_r(P)$ è il raggio della circonferenza osculatrice alla curva nel punto P. Nel nostro caso, avendo la circonferenza osculatrice, l'inverso del suo raggio ci dà la curvatura della parabola $x^2 - 2x - y = 0$ in A, essendo il vertice in detto punto si ha la massima curvatura.

NB. Dagli esercizi appare evidente la constatazione che le coniche degeneri permettono in modo semplice la costruzione dell'equazione del fascio, note le coordinate dei punti base. E' chiaro che non sempre è possibile individuare i punti base risolvendo un sistema di quarto grado in quanto l'equazione risolvente dopo la sostituzione è un'equazione di quarto grado: equazione che se non cade in casi di algoritmi algebrici usuali non sempre si è in grado di risolvere a meno che dopo un laborioso e lungo procedimento di calcolo si riesca applicando le formule di Cardano-Ruffini.

- Metodo dei fasci per la ricerca del fuoco di una conica

I fasci di coniche degenerate ci permettono di calcolare fuochi e direttrici: infatti l'equazione delle coniche che posseggono un fuoco nel punto $F(\alpha; \beta)$ e per direttrice relativa ad esso la retta:

$$ax + by + c = 0$$

Appartengono al fascio individuato dalla conica degenera nelle rette isotrope: cioè le rette isotrope uscenti da F, $(x - \alpha) + i(y - \beta) = 0$ e $(x - \alpha) - i(y - \beta) = 0$; e, dalla direttrice contata due volte. L'equazione del fascio risulta:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + k(ax + by + c)^2 = 0$$

Ora, conoscendo l'equazione della conica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sia $F(\alpha; \beta)$ uno dei suoi fuochi e sia $ax + by + c = 0$ la direttrice relativa. Consideriamo il fascio:

$$1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F + (ax + by + c)^2 = 0$$

(avendo incluso nei parametri a,b,c il parametro combinatorio k). Condotte da F le tangenti alla conica data, queste generano una conica degenera del fascio 1) e precisamente

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$$

Che rappresenta un cerchio di centro F e raggio nullo. Determinare F quindi significa calcolare i parametri a,b,c del fascio in modo tale da individuare una circonferenza a raggio nullo, quindi determinare le coordinate del centro di tale circonferenza che coincidono con le coordinate del fuoco e sostituiti i valori a,b,c nell'equazione della retta e si ha la direttrice.

Applichiamo questo procedimento alla ricerca dei fuochi e della direttrice della conica:

$$1) \quad x^2 - 4x + 2y - 1 = 0$$

Determiniamo l'equazione del fascio: $x^2 - 4x + 2y - 1 + (ax + by + c)^2 = 0$

Ridotta a forma normale diviene:

$$((1 + a^2)x^2 + 2abxy + b^2y^2 + (2ac - 4)x + (2bc + 2)y + c^2 - 1 = 0$$

Perché questa conica sia una circonferenza, devono verificarsi queste condizioni:

$$\begin{cases} 1 + a^2 = b^2 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} b = 0 \\ a = \pm i \end{cases}$, il secondo sistema dà valori immaginari, che non offrono interesse. Sostituiamo quindi $a = 0$ e $b = 1$, si ha

$$x^2 + y^2 - 4x + (2c + 2)y + c^2 - 1 = 0$$

Imponiamo che il raggio della circonferenza sia nullo:

$$r^2 = (2)^2 + (c + 1)^2 - c^2 + 1 = 0$$

Risolvendo si ha $2c = -6$, da cui $c = -3$

L'equazione della circonferenza del fascio con raggio nullo è:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$$

Il centro di detta circonferenza è $C(2; 2)$ e coincide con il fuoco della conica: $F(2; 2)$

Mentre la direttrice è $y - 3 = 0$

Allo stesso risultato si perviene sostituendo $a = 0$ e $B = -1$. Quindi la conica ammette un solo fuoco, si tratta di una parabola.

Infatti esplicitando rispetto alla y si ha la forma normale della parabola:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}$$

applicando le regole già viste precedentemente le coordinate del fuoco sono:

$$\begin{cases} x_F = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \\ y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-(4+1)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \end{cases}$$

F(2; 2) e la direttrice ha equazione

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+4+1}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3$$

che coincidono con i valori trovati

E' chiaro che in questo esercizio la strada più economica è quella di applicare le regole precedentemente acquisite.

2) $3x^2 + 4y^2 + 8y + 1 = 0$

Determiniamo l'equazione del fascio: $3x^2 + 4y^2 + 8y + 1 + (ax + by + c)^2 = 0$

Ridotta a forma normale diviene:

$$((3 + a^2)x^2 + 2abxy + (4 + b^2)y^2 + 2acx + (2bc + 8)y + c^2 + 1 = 0$$

Perché questa conica sia una circonferenza, devono verificarsi queste condizioni:

$$\begin{cases} 3 + a^2 = 4 + b^2 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha $\begin{cases} b = 0 \\ a = \pm 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm i \end{cases}$, il secondo sistema dà valori immaginari, che non offrono interesse. Sostituiamo quindi $a = 1$ e $b = 0$, si ha

$$4x^2 + 4y^2 + 2cx + 8y + c^2 + 1 = 0$$

Imponiamo che il raggio della circonferenza sia nullo:

$$r^2 = \left(-\frac{c}{4}\right)^2 + (-1)^2 - \frac{c^2 + 1}{4} = 0$$

Risolvendo si ha $12 - 3c^2 = 0$, da cui $c = \pm 2$

L'equazione della circonferenza del fascio con raggio nullo è:

per $a = \pm 1$, $b = 0$ e $c = 2$: $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 5 = 0$ $C\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

per $a = \pm 1$, $b = 0$ e $c = -2$: $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 5 = 0$ $C\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

Pertanto i fuochi sono: $F_1\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ con direttrice: $x + 2 = 0$

$$F_2\left(-\frac{1}{2}; -1\right) \text{ con direttrice: } x - 2 = 0$$

Anche qui potevamo procedere con le regole già incontrate, dato che si tratta di un'ellisse traslata di vettore $\vec{v}(0; -1)$.

3) $5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2 + (6\sqrt{3} - 10)x + (6\sqrt{3} + 2)y + 28 - 6\sqrt{3} = 0$

Determiniamo l'equazione del fascio:

$$5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2 + (6\sqrt{3} - 10)x + (6\sqrt{3} + 2)y + 28 - 6\sqrt{3} + (ax + by + c)^2 = 0$$

Ridotta a forma normale diviene:

$$((5 + a^2)x^2 + (2ab - 6\sqrt{3})xy + (b^2 - 1)y^2 + (2ac - 10 + 6\sqrt{3})x + (2bc + 2 + 6\sqrt{3})y + c^2 + 28 - 6\sqrt{3} = 0$$

Perché questa conica sia una circonferenza, devono verificarsi queste condizioni:

$$\begin{cases} 5 + a^2 = b^2 - 1 \\ 2ab - 6\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha $\begin{cases} b = \pm 3 \\ a = \pm\sqrt{3} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} a = \pm 3i \\ b = \pm\sqrt{3}i \end{cases}$, il secondo sistema dà valori immaginari, che non offrono interesse. Sostituiamo quindi $a = \sqrt{3}$ e $b = 3$, si ha

$$8x^2 + 8y^2 + (2\sqrt{3}c - 10 + 6\sqrt{3})x + (6c + 2 + 6\sqrt{3})y + c^2 + 28 - 6\sqrt{3} = 0$$

Imponiamo che il raggio della circonferenza sia nullo:

$$r^2 = \left(-\frac{2\sqrt{3}c - 10 + 6\sqrt{3}}{16}\right)^2 + \left(-\frac{6c + 2 + 6\sqrt{3}}{16}\right)^2 - \frac{c^2 + 28 - 6\sqrt{3}}{8} = 0$$

Risolvendo si ha $c^2 + 2(\sqrt{3} + 3)c + 6\sqrt{3} - 36 = 0$, da cui $c = -\sqrt{3} - 3 \pm 4\sqrt{3}$

$$c_1 = 3\sqrt{3} - 3 \quad \text{e} \quad c_2 = -5\sqrt{3} - 3$$

L'equazione della circonferenza del fascio con raggio nullo è:

$$\text{per } a = \pm\sqrt{3}, b = 3 \text{ e } c = 3\sqrt{3} - 3 : 8x^2 + 8y^2 + 8x + (24\sqrt{3} - 16)y + 64 - 24\sqrt{3} = 0$$

$$C\left(-\frac{1}{2}; \frac{2-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{per } a = \pm\sqrt{3}, b = 3 \text{ e } c = -5\sqrt{3} - 3 : 8x^2 + 8y^2 - 40x + (16 + 24\sqrt{3})y + 112 + 24\sqrt{3} = 0$$

$$C\left(\frac{5}{2}; \frac{2+3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pertanto i fuochi sono : $F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{2-3\sqrt{3}}{2}\right)$ con direttrice : $\sqrt{3}x + 3y + 3\sqrt{3} - 3 = 0$

$$F_2\left(\frac{5}{2}; \frac{2+3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ con direttrice : } \sqrt{3}x + 3y - 5\sqrt{3} - 3 = 0$$

- FASCIO DI PARABOLE

-) Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ con $x_A \neq x_B$, se $y = mx + q$ è la retta passante per A e B la combinazione lineare

$$y - mx - q + k(x - x_B)(x - x_A) = 0$$

rappresenta il fascio di parabole con asse parallelo all'asse y e avente A e B come punti base. Se l'asse della parabola è parallelo alla retta $t \equiv ax + by + c = 0$, allora si tracciano le rette parallele a t passante per A e B e siano rispettivamente $ax + by + p = 0$ e $ax + by + q = 0$. la combinazione lineare diventa:

$$y - mx - q + k(ax + by + p)(ax + by + q) = 0$$

Esercizi:

- 1) Determinare il fascio di parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate e passante per A(3 ; 5) e B(2 ; 6).

Risoluzione

Determiniamo l'equazione della retta passante per A e B : $y = -x + 8$, il fascio è dato da

$$y + x - 8 + k(x - 3)(x - 2) = 0$$

La cui equazione in forma normale è : $y = -kx^2 + (5k - 1)x + 8 - 6k$

- 2) Determinare il fascio di parabole con asse parallelo all'asse delle ascisse e passante per A(-2 ; 3) e B (-3 ; -5).

Risoluzione

Determiniamo l'equazione della retta passante per A e B : $y = 8x + 19$, il fascio è dato da

$$y - 8x - 19 + k(y - 3)(y + 5) = 0$$

La cui equazione in forma normale è : $x = \frac{k}{8}y^2 + \frac{2k+1}{8}y - \frac{15k+19}{8}$

- 3) Determinare il fascio di parabole con asse parallelo alla retta $3x - 2y + 1 = 0$ e passante per A(1 ; 4) e B (-2 ; 3).

Risoluzione:

Determiniamo l'equazione della retta passante per A e B : $3y - x - 11 = 0$, le equazioni delle rette parallele all'asse passanti per A e B: $3x - 2y + 5 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$; il fascio è dato da

$$3y - x - 11 + k(3x - 2y + 5)(3x - 2y + 12) = 0$$

La cui equazione in forma implicita è:

$$9kx^2 - 12kxy + 4ky^2 + (51k - 1)x - (34k - 3)y + 60k - 11 = 0$$

-) Data la retta $y = mx + q$ e detto T (x_T ; y_T) un suo punto, l'equazione

$$y - mx - q + k(x - x_T)^2 = 0$$

rappresenta il fascio di parabole con asse parallelo all'asse y e tangenti alla retta data nel suo punto T.

Se l'asse della parabola è parallelo alla retta $t \equiv ax + by + c = 0$, allora si traccia la retta parallela a t passante per T e sia $ax + by + p = 0$, la combinazione lineare diventa:

$$y - mx - q + k(ax + by + p)^2 = 0$$

Esercizi:

- 1) Dato il punto T (2 ; 3), determinare il fascio di parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate e tangenti alla retta passante per T: $t \equiv y = 2x - 1$. Determinare poi la parabola del fascio che passa per il punto A (-1 ; 5).

Risoluzione:

L'equazione del fascio è $y - 2x + 1 + k(x - 2)^2 = 0$, che ridotta in forma normale è

$$y = -kx^2 + 2(2k - 1)x - (4k + 1)$$

Imponendo poi la C.N.S perché un punto appartenga ad una curva, calcoliamo il valore di k per cui la parabola del fascio passa per A:

$$5 = -k + 2(2k - 1)(-1) - (4k + 1)$$

Da cui $k = -8$

Pertanto l'equazione della parabola è

$$y = 8x^2 - 34x + 31$$

- 2) Dato il punto $T(-2; 5)$, determinare il fascio di parabole con asse parallelo all'asse delle ascisse e tangente alla retta passante per $T: t \equiv y = x + 7$. Determinare il parametro k per cui la parabola del fascio interseca l'asse delle ascisse in $A(3; 0)$

Risoluzione:

L'equazione del fascio è $y - x - 7 + k(y - 5)^2 = 0$, che ridotta in forma normale è

$$x = ky^2 - (10k - 1)y + 25k - 7$$

Imponendo poi la C.N.S perché un punto appartenga ad una curva, calcoliamo il valore di k per cui la parabola del fascio passa per A:

$$3 = 25k - 7$$

Da cui $k = \frac{2}{5}$

Pertanto l'equazione della parabola è:

$$x = \frac{2}{5}y^2 - 3y + 3$$

- 3) Dato il punto $T(1; -4)$, determinare il fascio di parabole con asse parallelo alla retta $r \equiv y = 3x - 2$ e tangente alla retta passante per $T: t \equiv y = -x - 3$.

Risoluzione

Determiniamo la retta parallela all'asse passante per $T: y = 3x - 7$. L'equazione del fascio è $y + x + 3 + k(y - 3x + 7)^2 = 0$, che ridotta in forma implicita è:

$$9kx^2 - 6kxy + ky^2 - (42k - 1)x + (14k + 1)y + 49k + 3 = 0$$

-) Dati i punti $A(x_1; 0)$ e $B(x_2; 0)$ il fascio di parabole di punti base A e B è

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

se $x_1 = x_2$, il fascio di parabole si riduce a $y = a(x - x_1)^2$ e tutte le parabole sono tangenti in A con asse parallelo all'asse y .

Se l'asse della parabola è parallelo alla retta $t \equiv ax + by + c = 0$, allora si tracciano le rette parallele a t passante per A e B e siano rispettivamente $ax + by + p = 0$ e $ax + by + q = 0$. la combinazione lineare diventa:

$$y = k(ax + by + p)(ax + by + q)$$

Nel caso che A e B coincidono, la combinazione diventa:

$$y = k(ax + by + p)^2$$

Esercizi:

- 1) Determinare la parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per $A(-2; 0)$ e $B(4; 0)$ e $C(3; -1)$.

Risoluzione

Dapprima determino il fascio di parabole di punti base A e B : $y = a(x + 2)(x - 4)$, quindi imponendo la C.N.S perché un punto appartenga ad una curva, calcoliamo il valore di a per cui la parabola del fascio passa per C: $-1 = -5a$, da cui $a = \frac{1}{5}$.

Pertanto l'equazione della parabola è

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$$

- 2) Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse tangente all'asse y nel punto $V(0; 4)$ e passante per il punto $A(4; -2)$.

Risoluzione

Dapprima determino il fascio delle parabole tangenti in V all'asse delle y :

$x = k(y - 4)^2$, quindi imponendo la C.N.S perché un punto appartenga ad una curva, calcolo il valore di k per cui la parabola del fascio passa per A : $4 = 36k$, da cui $k = \frac{1}{9}$.

Pertanto l'equazione della parabola è

$$x = \frac{1}{9}y^2 - \frac{8}{9}y + \frac{16}{9}$$

- 3) Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo alla retta $t \equiv y = -2x + 1$, passante per $A(-3; 0)$, $B(1; 0)$ e $C(4; 3)$.

Risoluzione

Dapprima determiniamo le rette parallele a t passanti per A e B :

$$t_A \equiv y = -2x - 6 \quad ; \quad t_B \equiv y = -2x + 2$$

quindi calcoliamo il fascio : $y = k(y + 2x + 6)(y + 2x - 2)$, che scritta in forma implicita è

$$4kx^2 + 4kxy + ky^2 + 8kx + (4k - 1)y - 12k = 0$$

Imponendo la C.N.S perché un punto appartenga ad una curva, calcolo il valore di k per cui la parabola del fascio passa per C : $3 = 153k$, da cui $k = \frac{1}{51}$

Pertanto l'equazione della parabola è:

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 47y - 12 = 0$$

-) Il fascio di parabole di vertice $V(x_v; y_v)$ e l'asse parallelo all'asse y è $y = a(x - x_v)^2 + y_v$, mentre con l'asse parallelo all'asse delle ascisse è $x = a(y - y_v)^2 + x_v$

-) Il fascio di parabole con asse parallelo all'asse y e tangenti nell'origine degli assi O alla retta $y = mx$, ha equazione $y = ax^2 + mx$; nel caso della parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse, l'equazione è : $x = ay^2 + \frac{1}{m}y$

-) Come per le coniche in generale anche per la parabola possiamo ottenere il fascio di parabole combinando opportunamente due parabole particolari. Siano perciò Γ_1 e Γ_2 due parabole con assi paralleli e concordi:

a) supponiamo con assi paralleli all'asse delle ordinate: $\Gamma_1 \equiv a_1x^2 + b_1x - y + c_1 = 0$ e

$\Gamma_1 \equiv a_2x^2 + b_2x - y + c_2 = 0$, e λ, μ due parametri reali non contemporaneamente nulli. Consideriamo l'equazione ottenuta come combinazione lineare di Γ_1 e Γ_2 :

$$\lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2 = 0$$

la cui equazione è: $\lambda(a_1x^2 + b_1x - y + c_1) + \mu(a_2x^2 + b_2x - y + c_2) = 0$, che ridotta a forma normale

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)x^2 + (\lambda b_1 + \mu b_2)x - (\lambda + \mu)y + (\lambda c_1 + \mu c_2) = 0$$

Se $\lambda a_1 + \mu a_2 \neq 0$, tale equazione rappresenta una generica parabola; al variare di λ e μ si otterrà un fascio di parabole di base o generatrici Γ_1 e Γ_2 e dello stesso tipo di queste: in particolare se $\lambda \neq 0$ e $\mu = 0$, l'equazione rappresenta Γ_1 ; se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, l'equazione rappresenta Γ_2 . Supposto $\lambda \neq 0$ e posto $\frac{\mu}{\lambda} = k$, l'equazione del fascio diventa:

$$(a_1 + ka_2)x^2 + (b_1 + kb_2)x - (1 + k)y + (c_1 + kc_2) = 0$$

Quest'ultima equazione rappresenta al variare di k , tutte le parabole del fascio generato da Γ_1 e Γ_2 , tranne la parabola Γ_2 , che si otteneva per $\lambda = 0$, mentre la parabola Γ_1 si ottiene ponendo $k = 0$. Tutte le parabole del fascio, essendo tutte dello stesso tipo di Γ_1 e Γ_2 , si intersecano in due punti detti punti base ed ammettono una retta base, che è la retta passante per i due punti base del fascio e che costituisce una delle parabole degeneri del fascio con le rette $x = x_1$ e $x = x_2$, dove x_1 ed x_2 sono le ascisse dei punti base.

Per determinare i punti base e la retta base, basta risolvere in k l'equazione matriciale:

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & 0 & \frac{1}{2}(b_1 + kb_2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1 + k) \\ \frac{1}{2}(b_1 + kb_2) & -\frac{1}{2}(1 + k) & (c_1 + kc_2) \end{vmatrix} = 0$$

Sostituire le soluzioni di k nell'equazione del fascio e si trova un'equazione di primo grado che è l'equazione della retta base ed un'equazione di secondo grado che risolta in x dà l'ascissa dei due punti, sostituendo queste ascisse nell'equazione della retta si ricavano le ordinate dei punti.

b) supponiamo con assi paralleli all'asse delle ordinate: $\Gamma_1 \equiv a_1y^2 - x + b_1y + c_1 = 0$ e

$\Gamma_2 \equiv a_2y^2 - x + b_2y + c_2 = 0$, e λ, μ due parametri reali non contemporaneamente nulli.

Consideriamo l'equazione ottenuta come combinazione lineare di Γ_1 e Γ_2 :

$$\lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2 = 0$$

la cui equazione è: $\lambda(a_1y^2 - x + b_1y + c_1) + \mu(a_2y^2 - x + b_2y + c_2) = 0$, che ridotta a forma normale

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)y^2 + (\lambda b_1 + \mu b_2)y - (\lambda + \mu)x + (\lambda c_1 + \mu c_2) = 0$$

Se $\lambda a_1 + \mu a_2 \neq 0$, tale equazione rappresenta una generica parabola; al variare di λ e μ si otterrà un fascio di parabole di base o generatrici Γ_1 e Γ_2 : in particolare se $\lambda \neq 0$ e $\mu = 0$, l'equazione rappresenta Γ_1 ; se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, l'equazione rappresenta Γ_2 .

Supposto $\lambda \neq 0$ e posto $\frac{\mu}{\lambda} = k$, l'equazione del fascio diventa:

$$(a_1 + ka_2)y^2 + (b_1 + kb_2)y - (1 + k)x + (c_1 + kc_2) = 0$$

Quest'ultima equazione rappresenta al variare di k , tutte le parabole del fascio generato da Γ_1 e Γ_2 , tranne la parabola Γ_2 , che si otteneva per $\lambda = 0$, mentre la parabola Γ_1 si ottiene ponendo $k = 0$. Analogo ragionamento, fatto nel punto A), per la determinazione della retta base e dei punti base.

Es. Determinare il fascio di parabole avente per generatrici le parabole

$$\Gamma_1 \equiv y = x^2 - x + 2 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \equiv y = 4x^2 - x - 1$$

Così pure determinare i punti base e la retta base del fascio, nonché le parabole degeneri.

Risoluzione

Il fascio di parabole è dato da $\Phi \equiv x^2 - x - y + 2 + k(4x^2 - x - y - 1) = 0$, che ridotto a forma normale è $\Phi \equiv (1 + 4k)x^2 - (1 + k)x - (1 + k)y + 2 - k = 0$

Risolviamo la seguente equazione matriciale:

$$\begin{vmatrix} 1 + 4k & 0 & -\frac{1}{2}(1 + k) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1 + k) \\ -\frac{1}{2}(1 + k) & -\frac{1}{2}(1 + k) & 2 - k \end{vmatrix} = (1 + 4k) \left(-\frac{1}{2}(1 + k) \right)^2 = 0$$

Le cui soluzioni sono $k_1 = -\frac{1}{4}$ e $k_2 = -1$. Andando a sostituire questi valori nell'ultima equazione del fascio Φ , si hanno le due equazioni:

Prima equazione per $k = -\frac{1}{4}$: $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{9}{4} = 0$ che ridotta è $x + y - 3 = 0$

Seconda equazione per $k = -1$: $-3x^2 + 3 = 0$, che risolta si hanno $x_1 = -1$ e $x_2 = +1$

Sostituendo dette ascisse nella retta $x + y - 3 = 0$, si hanno le ordinate $y_1 = 4$ ed $y_2 = 2$

Quindi la retta base è $x + y - 3 = 0$ ed i punti base sono $P_1(-1; 4)$ e $P_2(1; 2)$; costituiscono le parabole degeneri le rette $x = -1$ e $x = 1$, oltre la retta base.

Per completezza logica vogliamo verificare che i punti P_1 e P_2 sono punti di intersezione delle parabole generatrici del fascio Γ_1 e Γ_2 . Risolviamo il seguente sistema, costituito dalle equazioni di Γ_1 e Γ_2 :

$$\begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ y = 4x^2 - x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ 4x^2 - x - 1 - (x^2 - x + 2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \text{che coincidono con le coordinate di } P_1 \text{ e } P_2.$$

- FASCIO DI CIRCONFERENZE

Siano $\Gamma_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $\Gamma_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ due circonferenze distinte dello stesso piano e λ, μ due parametri reali non contemporaneamente nulli. Consideriamo l'equazione ottenuta come combinazione lineare di Γ_1 e Γ_2 :

$$\lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2 = 0$$

la cui equazione è : $\lambda(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + \mu(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$, che ridotta a forma normale

$$(\lambda + \mu)x^2 + (\lambda + \mu)y^2 + (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2) = 0$$

se $\lambda + \mu \neq 0$, tale equazione rappresenta una generica circonferenza; al variare di λ e μ si otterrà un fascio di circonferenze di base o generatrici Γ_1 e Γ_2 : in particolare

se $\lambda \neq 0$ e $\mu = 0$, l'equazione rappresenta Γ_1 ; se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, l'equazione rappresenta Γ_2

Supposto $\lambda \neq 0$ e posto $\frac{\mu}{\lambda} = k$, l'equazione del fascio diventa:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + (c_1 + kc_2) = 0$$

con $k \neq -1$. Quest'ultima equazione rappresenta al variare di k , tutte le circonferenze del fascio generato da Γ_1 e Γ_2 , tranne la circonferenza Γ_2 , che si otteneva per $\lambda = 0$, mentre la circonferenza Γ_1 si ottiene ponendo $k = 0$.

Si possono presentare diversi casi rispetto alle posizioni delle due circonferenze generatrici:

-) Se le due circonferenze che generano la combinazione lineare si incontrano in due punti P_1 e P_2 anche le altre circonferenze del fascio passano per questi due punti, che sono detti perciò punti base del fascio. La retta passante per tali punti è detta asse radicale del fascio e la sua equazione si ottiene risolvendo per sottrazione il sistema costituito dalle equazioni delle due circonferenze basi: $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$. L'asse centrale, cioè il luogo dei centri delle circonferenze del fascio, risulta essere l'asse del segmento P_1 e P_2 . L'equazione del fascio è possibile, noti i punti base P_1 e P_2 , ottenerlo facendo la combinazione lineare di una circonferenza passante per i due punti e la retta passante per i due punti. Siano $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$, allora il fascio è

$$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 + k[(y - y_1) - m(x - x_1)] = 0$$

$$\text{con } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

-) Se le due circonferenze che generano la combinazione lineare si incontrano in un sol punto anche le altre circonferenze del fascio passano per questo punto. La retta tangente passante per detto punto comune alle due circonferenze è tangente a tutte le circonferenze del fascio e la sua equazione si ottiene risolvendo per sottrazione il sistema costituito dalle equazioni delle due circonferenze basi: $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$, come si nota la retta tangente è ancora l'asse radicale. L'asse centrale è la retta perpendicolare alla tangente nel

punto di tangenza. In questo contesto se si conosce il punto di tangenza. $P(x_p; y_p)$ e la retta tangente $y - y_p = m(x - x_p)$, l'equazione del fascio è possibile ottenerlo mediante la combinazione lineare tra la circonferenza degenera di centro P e la retta tangente:

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + k[y - y_p - m(x - x_p)] = 0$$

-) Se le due circonferenze che generano la combinazione lineare sono concentriche lo sono pure tutte le circonferenze del fascio, che ammettono lo stesso centro di quelle generatrici: anche in questo contesto l'equazione del fascio può essere scritta sotto quest'altra forma

$$x^2 + y^2 + x + y + \frac{c_1 + kc_2}{1 + k} = 0$$

-) Proprietà dell'asse radicale di un fascio di circonferenze “ Le tangenti tracciate da qualsiasi punto di essa ai membri della famiglia di circonferenze sono uguali “ in altro modo : *la potenza* di un punto che giace sull'asse radicale rispetto ai membri della famiglia è la stessa per tutte le circonferenze della famiglia.

Da tale proprietà possiamo dedurre una nuova definizione per l'asse radicale di un fascio di circonferenze:

Def. L'asse radicale di un fascio di circonferenze è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno uguale potenza rispetto a tutte le circonferenze del fascio “

Questa definizione ci permette di impostare un metodo grafico per individuare l'asse radicale di due circonferenze:

Per determinare graficamente l'asse radicale fra due circonferenze esterne si traccia una terza circonferenza, il cui centro non giaccia sulla retta dei centri delle prime due circonferenze e che interseca le due circonferenze. Si tracciano i due assi radicali, che si intersecano in un punto P. La retta perpendicolare alla retta dei centri e passante per il punto P è l'asse radicale delle prime due circonferenze.

L'asse radicale inoltre si considera pure come una circonferenza degenera del fascio a cui essa appartiene.

2 LUOGHI GEOMETRICI CONNESSI A CONICHE

-) Un segmento di lunghezza costante h scorre con i suoi estremi A e B sopra due rette ortogonali fisse x ed y : il luogo descritto da un punto P del segmento, distante a dall'estremo A è un'ellisse con asse principale $h-a$ ed asse secondario a .

-) Dato un triangolo isoscele OBA, avente l'estremo O della base OA fisso, e la lunghezza h del lato $OB=AB$ costante, il luogo descritto dal punto P del lato AB, distante a da A, quando il vertice A percorre una retta passante per O, è un'ellisse di semiasse maggiore $2h-a$ e di asse minore a .

NB. Questi due luoghi permettono la costruzione di *ellissografi o compassi ellittici*, atti a disegnare l'ellisse con moto continuo, come un normale compasso traccia una circonferenza.

-) Per il punto Q del piano cartesiano si conduca una generica retta r , che incontri gli assi cartesiani ortogonali x ed y rispettivamente in A e B. Se M è il punto medio di AB, si segni su r il punto P simmetrico di Q rispetto ad M. Il luogo descritto da P al variare di r è un'iperbole equilatera riferita agli asintoti di costante il prodotto delle coordinate di Q.

-) Il luogo dei centri delle circonferenze di un fascio (individuato da due sue circonferenze dette base) è una retta detta asse centrale del fascio (retta passante per tutti i centri delle circonferenze del fascio) ed è perpendicolare all'asse radicale.

Dimostrazione

Siano $\Gamma_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $\Gamma_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ le due rette base del fascio, l'equazione del fascio è

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k\Gamma_2 \equiv (x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + k(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

Che ridotta in forma normale è

$$\Phi \equiv (1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + (c_1 + kc_2) = 0$$

Dividendo per $1+k \neq 0$, si ha

$$\Phi \equiv x^2 + y^2 + \frac{(a_1+ka_2)}{(1+k)}x + \frac{(b_1+kb_2)}{(1+k)}y + \frac{(c_1+kc_2)}{(1+k)} = 0$$

Il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è dato dal sistema parametrico in k :

$$\begin{cases} x = -\frac{(a_1 + ka_2)}{2(1+k)} \\ y = -\frac{(b_1 + kb_2)}{2(1+k)} \end{cases}$$

Da cui eliminando il parametro k, si ha l'equazione cartesiana del luogo:

$$\gamma \equiv (b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y - \frac{1}{2}(a_1b_2 - b_1a_2) = 0,$$

che risulta una retta.

Verifichiamo che tale retta è perpendicolare all'asse radicale del fascio:

$$\varphi \equiv (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

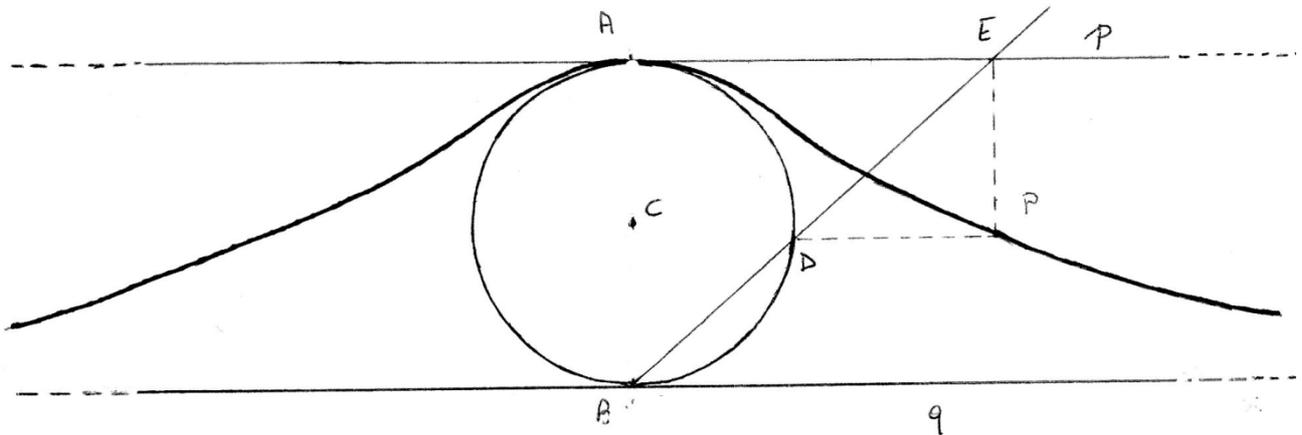
Perché due rette del piano siano perpendicolari è che la somma dei prodotti dei coefficienti delle variabili omonime delle due equazioni sia uguale a zero:

$$(b_1 - b_2)(a_1 - a_2) + (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) = (b_1 - b_2)(a_1 - a_2) - (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = 0$$

Pertanto le due rette sono perpendicolari.

-) *Versiera di Agnesi*

Sia data una circonferenza Γ di centro C e raggio r . Siano A e B due punti diametrali della circonferenza e p, q le rette tangenti rispettivamente in A e B alla circonferenza Γ ; sia t la retta

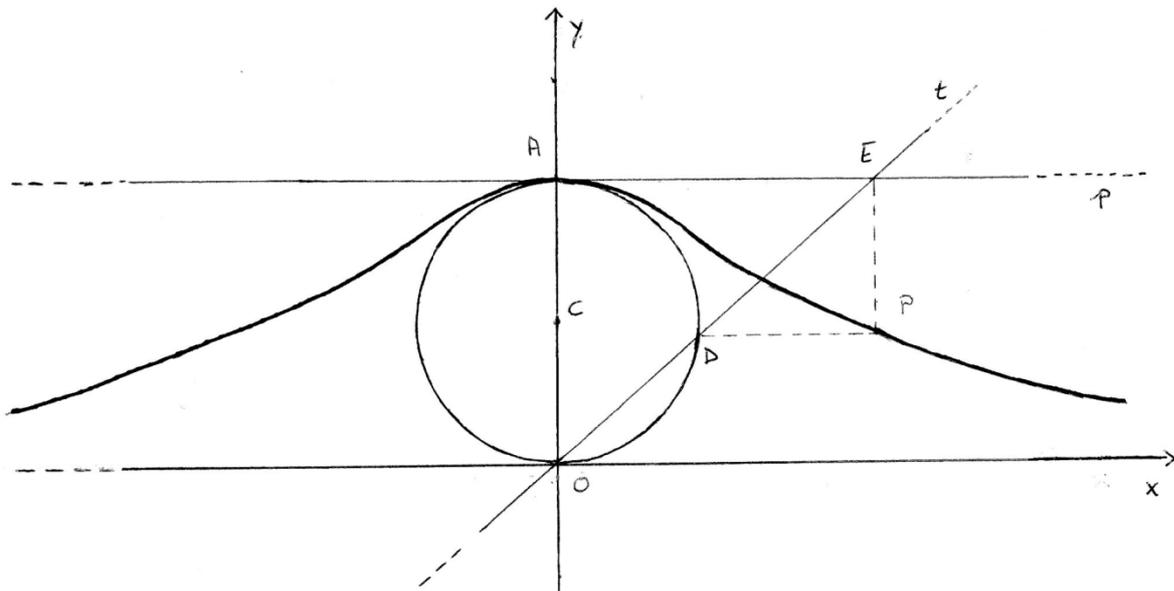


passante B, che interseca ulteriormente la circonferenza Γ in D e la retta tangente p in E.

Def. Si chiama *Versiera di Agnesi* il luogo geometrico dei punti del piano descritto dal punto P: punto di intersezione delle rette condotte da D e da E parallele rispettivamente alle retta tangente p e alla retta passante per A e B, al variare della retta t nel fascio di rette di centro B.

Ricerca dell'equazione

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonale xOy con $O \equiv B$, asse delle ascisse x coincidente con la retta q tangente in B e asse delle ordinate la retta sostegno del diametro AB. Posta la misura del



raggio r di Γ uguale ad a , l'equazione della circonferenza Γ riferita ad xOy è

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

Cioè essa è tangente all'asse x nell'origine O e di centro $C(0; a)$.

La retta p , tangente a Γ in $A(0; 2a)$ alla circonferenza ha equazione:

$$y = 2a.$$

Le coordinate di D sono date dalle soluzioni diverse da zero del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2am}{1+m^2} \\ y = \frac{2am^2}{1+m^2} \end{cases} \rightarrow D\left(\frac{2am}{1+m^2}; \frac{2am^2}{1+m^2}\right)$$

Le coordinate di E sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 2a \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2a}{m} \\ y = 2a \end{cases} \rightarrow E\left(\frac{2a}{m}; 2a\right)$$

Il punto P ha coordinate date dall'ascissa di E e dall'ordinata di D: $P\left(\frac{2a}{m}; \frac{2am^2}{1+m^2}\right)$

Il luogo geometrico descritto dal punto P al variare della retta t per O in coordinate parametriche sono date:

$$\begin{cases} x = \frac{2a}{m} \\ y = \frac{2am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

In coordinate cartesiane è dato

$$y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$$

Che risulta una cubica razionale asintotica rispetto all'asse x.

La cui area:

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{8a^3}{4a^2 + x^2} dx = \frac{16a^3}{4a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} dx = \frac{32a^4}{4a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} d\frac{x}{2a} = 8\pi a^2 \left| \arctang \frac{x}{2a} \right|_0^{+\infty} = 4\pi a^2,$$

è quattro volte l'area del cerchio dato, mentre la sua lunghezza risulta infinita.

Tale curva prende nome da colei: Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), che la studiò.

-) Il luogo geometrico dei centri P del fascio di circonferenze passanti per un dato punto A e tangenti ad una data circonferenza Γ di centro C e raggio r è una conica che ammette A e C come suoi fuochi.

Se A è interno a Γ , allora la conica è un'ellisse; se A è esterno a Γ , allora la conica è un'iperbole.

Se $AC = 2c$ e la retta sostegno di AC costituisce l'asse delle ascisse con O punto medio di AC l'origine del sistema cartesiano, allora equazione del luogo è

$$4(r^2 - 4c^2)x^2 + 4r^2y^2 = r^2(r^2 - 4c^2)$$

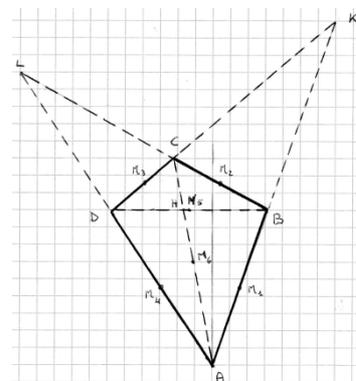
Se $r > 2c$, l'equazione è quella di un'ellisse; se $r < 2c$, l'equazione è quella di un'iperbole.

-) Considerato un quadrilatero completo ABCD (vedi figura accanto)

i sei punti medi $M_1(A,B)$, $M_2(B,C)$, $M_3(C,D)$, $M_4(D,A)$, $M_5(B,D)$, $M_6(A,C)$ ed i tre punti diagonali $L = r_1(A,D) \cap r_2(B,C)$,

$K = r_3(A,B) \cap r_4(C,D)$ e $H = r_5(B,D) \cap r_6(A,C)$ stanno tutti su una conica detta conica dei nove punti. Per questo quadrilatero vale il seguente teorema:

Teorema : “ La conica dei nove punti è il luogo dei centri delle coniche del fascio aventi per punti base i vertici A, B, C e D del quadrilatero. “



Dimostrazione

Consideriamo, senza ledere la generalità del teorema, la famiglia dei quadrilateri aventi i vertici sugli assi e precisamente $A(x_A; 0)$, $B(0; y_B)$, $C(x_C; 0)$, $D(0; y_D)$.

Consideriamo le rette

$$\begin{aligned} r_1(A,B) &\equiv y_B x + x_A y - x_A y_B = 0, & r_2(C,D) &\equiv y_D x + x_C y - x_C y_D = 0 \\ r_3(A,D) &\equiv y_D x + x_A y - x_A y_D = 0, & r_4(C,B) &\equiv y_B x + x_C y - x_C y_B = 0 \end{aligned}$$

Il fascio di coniche avente come punti base A,B,C,D è dato dalla combinazione lineare delle coniche spezzate o degenerare $\Gamma_1 \equiv r_1(A,B) \cdot r_2(C,D)$ e $\Gamma_2 \equiv r_3(A,D) \cdot r_4(C,B)$:

$$\Phi \equiv \Gamma_1 + k \Gamma_2 \equiv (y_B x + x_A y - x_A y_B)(y_D x + x_C y - x_C y_D) + k (y_D x + x_A y - x_A y_D)(y_B x + x_C y - x_C y_B) = 0$$

Scritta in forma normale è

$$\Phi \equiv (1+k)y_B y_D x^2 + [(x_C y_B + x_A y_D) + k(x_C y_D + x_A y_B)]xy + (1+k)x_A x_C y^2 + - (1+k)(x_C + x_A)y_B y_D x - (1+k)(y_D + y_B)x_A x_C y + (1+k)x_A x_C y_B y_D = 0$$

Dividiamo per $1+k$ con $k \neq -1$

$$\Phi \equiv y_B y_D x^2 + \frac{[(x_C y_B + x_A y_D) + k(x_C y_D + x_A y_B)]}{1+k} xy + x_A x_C y^2 - (x_C + x_A)y_B y_D x - (y_D + y_B)x_A x_C y + x_A x_C y_B y_D = 0$$

Posto $h = \frac{[(x_C y_B + x_A y_D) + k(x_C y_D + x_A y_B)]}{1+k}$, si ha

$$\Phi \equiv y_B y_D x^2 + hxy + x_A x_C y^2 - (x_C + x_A)y_B y_D x - (y_D + y_B)x_A x_C y + x_A x_C y_B y_D = 0$$

il fascio di coniche passanti per i punti base A, B, C, D.

Consideriamo la matrice cubica del fascio di coniche

$$\begin{vmatrix} y_B y_D & \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}(x_C + x_A)y_B y_D \\ \frac{1}{2}h & x_A x_C & -\frac{1}{2}(y_D + y_B)x_A x_C \\ -\frac{1}{2}(x_C + x_A)y_B y_D & -\frac{1}{2}(y_D + y_B)x_A x_C & x_A x_C y_B y_D \end{vmatrix}$$

Il luogo dei centri delle coniche del fascio è determinato dal sistema parametrico in h, le cui equazioni costituiscono due diametri coniugati del fascio di coniche Φ :

$$\begin{cases} y_B y_D x + \frac{1}{2}hy - \frac{1}{2}(x_C + x_A)y_B y_D = 0 \\ \frac{1}{2}hx + x_A x_C y - \frac{1}{2}(y_D + y_B)x_A x_C = 0 \end{cases}$$

Eliminando il parametro h si ottiene l'equazione cartesiana del luogo:

$$\Omega \equiv 2y_B y_D x^2 - 2x_A x_C y^2 - (x_A + x_C)y_B y_D x + (y_B + y_D)x_A x_C y = 0$$

Verifichiamo che i sei punti medi $M_1(A,B)$, $M_2(B,C)$, $M_3(C,D)$, $M_4(D,A)$, $M_5(B,D)$, $M_6(A,C)$ ed i punti diagonali $L = r_1(A,D) \cap r_2(B,C)$, $K = r_3(A,B) \cap r_4(C,D)$ e $H = r_5(B,D) \cap r_6(A,C)$ appartengono alla conica Ω , detta appunto dei nove punti. Ci limitiamo al calcolo di due di detti punti, lasciando al lettore la verifica di altri:

$$M_3 \left(\frac{x_C}{2}; \frac{y_D}{2} \right) \rightarrow 2y_B y_D \left(\frac{x_C}{2} \right)^2 - 2x_A x_C \left(\frac{y_D}{2} \right)^2 - (x_A + x_C) y_B y_D \frac{x_C}{2} + (y_B + y_D) x_A x_C \frac{y_D}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} y_B y_D x_C^2 - \frac{1}{2} x_A x_C y_D^2 - \frac{1}{2} y_B y_D x_C^2 - \frac{1}{2} x_A x_C y_B y_D + \frac{1}{2} x_A x_C y_B y_D + \frac{1}{2} x_A x_C y_D^2 = 0$$

Eliminando al primo membro i monomi opposti si ha l'identità $0 = 0$, pertanto $M_3 \in \Omega$, analogo procedimento per gli altri punti medi.

Calcoliamo le coordinate di L, risolvendo il sistema costituito dalle rette:

$$r_1(A,D) \equiv y_D x + x_A y = x_A y_D \quad \text{e} \quad r_2(B,C) \equiv y_B x + x_C y = x_C y_B :$$

$$\begin{cases} y_D x + x_A y = x_A y_D \\ y_B x + x_C y = x_C y_B \end{cases}$$

Applicando il metodo di Cramer, troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{x_A x_C (y_D - y_B)}{x_C y_D - x_A y_B} \\ y = \frac{y_B y_D (x_C - x_A)}{x_C y_D - x_A y_B} \end{cases}$$

Pertanto le coordinate di L sono $L \left(\frac{x_A x_C (y_D - y_B)}{x_C y_D - x_A y_B}; \frac{y_B y_D (x_C - x_A)}{x_C y_D - x_A y_B} \right)$; andando a sostituire si ha

$$2y_B y_D \left(\frac{x_A x_C (y_D - y_B)}{x_C y_D - x_A y_B} \right)^2 - 2x_A x_C \left(\frac{y_B y_D (x_C - x_A)}{x_C y_D - x_A y_B} \right)^2 - (x_A + x_C) y_B y_D \frac{x_A x_C (y_D - y_B)}{x_C y_D - x_A y_B} +$$

$$+ (y_B + y_D) x_A x_C \frac{y_B y_D (x_C - x_A)}{x_C y_D - x_A y_B} = 0$$

$$\frac{2y_B y_D x_A^2 x_C^2 (y_D^2 - 2y_D y_B + y_B^2) - 2x_A x_C y_B^2 y_D^2 (x_A^2 - 2x_A x_C + x_C^2)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2} +$$

$$\frac{(y_B + y_D) x_A x_C y_B y_D (x_C - x_A) (x_C y_D - x_A y_B) - (x_A + x_C) y_B y_D x_A x_C (y_D - y_B) (x_C y_D - x_A y_B)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2}$$

$$= 0$$

$$\frac{2x_A x_C y_B y_D (x_A x_C y_D^2 - 2x_A x_C y_D y_B + x_A x_C y_B^2 - y_B y_D x_A^2 + 2x_A x_C y_D y_B - y_B y_D x_C^2)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2} +$$

$$\frac{x_A x_C y_B y_D (x_C y_D - x_A y_B) (x_C y_B + x_C y_D - x_A y_B - x_C y_D + x_C y_B - x_C y_D - x_A y_D + x_A y_B)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2} = 0$$

$$\frac{2x_A x_C y_B y_D (x_C y_D - x_A y_B) (x_A y_D - x_C y_B)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2} + \frac{2x_A x_C y_B y_D (x_C y_D - x_A y_B) (x_C y_B - x_A y_D)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2} = 0$$

$$\frac{2x_A x_C y_B y_D (x_C y_D - x_A y_B) (x_A y_D - x_C y_B) - 2x_A x_C y_B y_D (x_C y_D - x_A y_B) (x_A y_D - x_C y_B)}{(x_C y_D - x_A y_B)^2} = 0$$

Al numeratore i monomi sono uguali ed opposti, quindi la loro somma è 0.

Pertanto $L \in \Omega$, analogo procedimento per gli altri punti diagonali. Il teorema è dimostrato.

NB. Si definisce quadrilatero piano completo la figura geometrica costituita da quattro punti non allineati A, B, C, D (detti vertici) e dai sei rette (dette lati) che li congiungono a due a due.

Due lati si dicono opposti se non passano per uno stesso vertice. Si hanno tre coppie di lati opposti: AB e CD, AC e BD, AD e BC. Il punto comune a due lati opposti prende nome di punto diagonale

- Curve d'ordine superiori al secondo ordine

a) Cissoide di Diocle:

Consideriamo una circonferenza Γ ed un suo diametro OA, siano r e t rispettivamente la semiretta uscente da O e la retta tangente alla circonferenza nel suo punto A.

La semiretta r interseca la circonferenza nell'ulteriore punto Q e la retta tangente in R. Al variare di r intorno ad O il luogo geometrico determinato dai punti P di r , tale che $OP = QR$, è una curva detta *cissoide di Diocle*. Tale curva è una curva razionale, che presenta una cuspidine nel punto O, ammette la retta t come asintoto e risulta simmetrica rispetto al diametro OA.

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'origine in O e asse delle ascisse la retta orientata OA, determiniamo l'equazione cartesiana del luogo.

L'equazione della circonferenza Γ è: $(x - r)^2 + y^2 = r^2$, che ridotta a forma normale è:

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

L'equazione della retta t è $x = 2r$, mentre l'equazione della retta r è $y = mx$.

Il punto Q è dato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2rx = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 + m^2)x^2 - 2rx = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow O(0;0) \text{ e } Q\left(\frac{2r}{1+m^2}; \frac{2rm}{1+m^2}\right)$$

Il punto R è dato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = 2r \\ y = mx \end{cases} \rightarrow R(2r; 2rm)$$

Sia P un punto della retta r , le sue coordinate sono: $P(x; mx)$

Impostiamo la condizione geometrica $OP = QR$:

$$\sqrt{x^2 + m^2x^2} = \sqrt{\left(2r - \frac{2r}{1+m^2}\right)^2 + \left(2rm - \frac{2rm}{1+m^2}\right)^2}$$

Elevando al quadrato i due membri e sviluppando i quadrati si ha:

$$x^2 + m^2x^2 = \frac{4r^2m^4}{(1+m^2)^2} + \frac{4r^2m^6}{(1+m^2)^2}$$

Raccogliendo e semplificando si ha

$$x^2 = \frac{4r^2m^4}{(1+m^2)^2}$$

Operando la radice quadrata ad ambo i membri e considerato che x è maggiore di zero, si ha

$$x = \frac{2rm^2}{1+m^2}$$

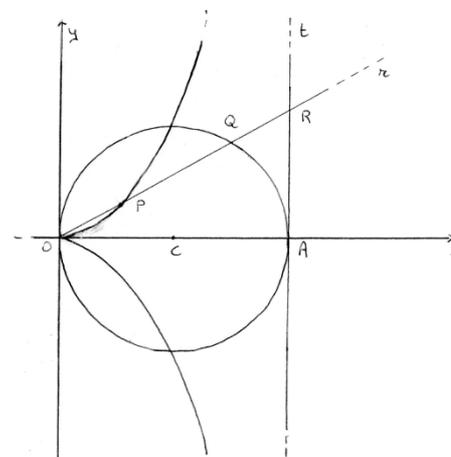
Dall'equazione della semiretta r si ha che $m = \frac{y}{x}$. Sostituendo tale valore nell'equazione, si ha

$$x = \frac{2r \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

Facendo il m.c.m, semplificando e riducendo a forma implicita si ha l'equazione della curva *cissoide*: $x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0$

che risulta un'equazione razionale di terzo grado in x e y .

Poiché la y figura in tutti i monomi di grado pari, la curva grafico è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e O è un punto cuspidale e la retta t è il suo asintoto.



Diocle si servì di tale curva, dopo averla studiata, per risolvere uno dei tre problemi classici dell'antica Grecia: la *duplicazione del cubo*. Infatti se OA è lo spigolo del cubo da duplicare e sull'asse delle y nel verso positivo si prende un punto T tale che $OT = 2 OA$. Tracciato il segmento TA , questo interseca la curva in un punto M . Tracciata la semiretta r per M , essa interseca la tangente t in S . Si dimostra che il segmento AS è lo spigolo del cubo di volume doppio rispetto al cubo di spigolo OA : infatti posto $OA = 1$ ed $OT = 2$, le coordinate di M sono date risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

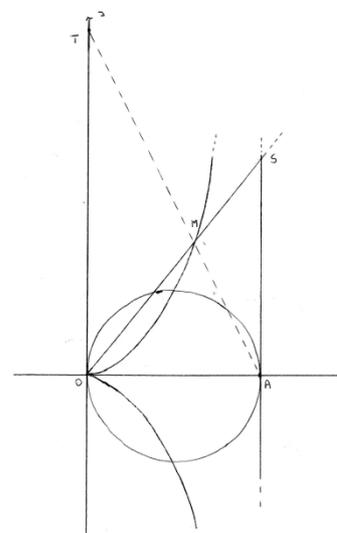
L'equazione risolvente è una cubica: $5x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 0$

La cui soluzione reale, approssimata a meno di 10^{-6} è $0,613511$. Di conseguenza le coordinate di M sono $M(0,613511 ; 0,772978)$. La

semiretta uscente da O e passante per M è $y = \frac{0,772978}{0,613511}x$,

il punto S è determinato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{0,772978}{0,613511}x \end{cases} \rightarrow S(1 ; 1,259925)$$



La radice cubica di 2 è $\sqrt[3]{2} = 1,25992105$, che a meno di 10^{-5} coincide con il valore della y corrispondente al valore della x trovato con la soluzione della cubica.

Nel capitolo I abbiamo trattato della duplicazione del cubo.

b) Concoide

- *Concoide delle retta, detta anche di Nicomede.*

Assegnata una retta t , un punto O e un segmento di misura k , si chiama *concoide di base t , polo O ed intervallo k* , il luogo dei punti P del piano tale che $AP = k$, con P appartenente ad una retta variabile s passante per O e A punto di intersezione di s con la retta t

Assumendo il polo O come origine e la retta perpendicolare alla retta t passante per O rispettivamente l'origine e l'asse delle ascisse di un sistema di assi cartesiani ortogonali, ponendo h la distanza della retta t dal polo O , determiniamo l'equazione del luogo.

La retta t ha equazione: $x = h$, la retta s ha equazione: $y = mx$; il punto A , essendo il punto di intersezione delle rette t ed s , ha coordinate $A(h; mh)$. Il punto P appartiene alla retta s , pertanto le sue coordinate sono $P(x; mx)$. Imponiamo la condizione che

$$AP = k : \text{cioè } \sqrt{(x - h)^2 + (mx - mh)^2} = k$$

Elevando ambo i termini al quadrato e sostituendo il valore di $m = \frac{y}{x}$, si ha

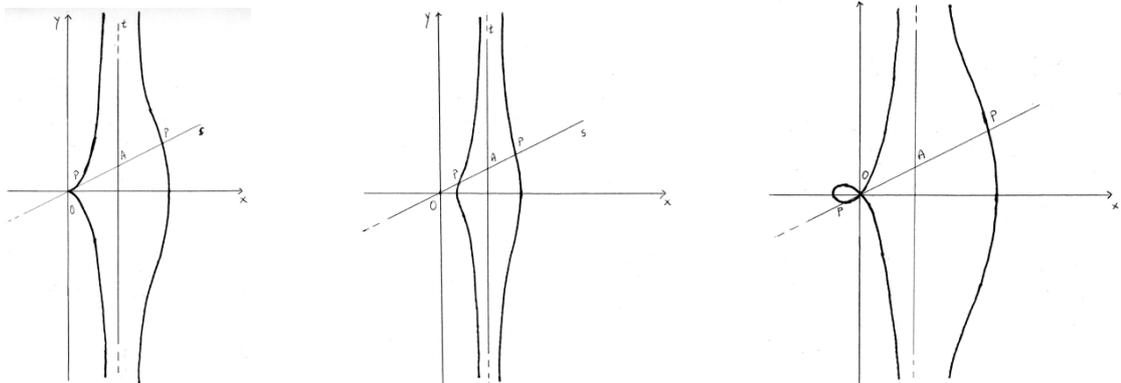
$$(x - h)^2 + (mx - mh)^2 = k^2$$

$$(x - h)^2 + \frac{y^2}{x^2}(x - h)^2 = k^2$$

Operando il m.c.d., raccogliendo il fattor comune si ha l'equazione del luogo

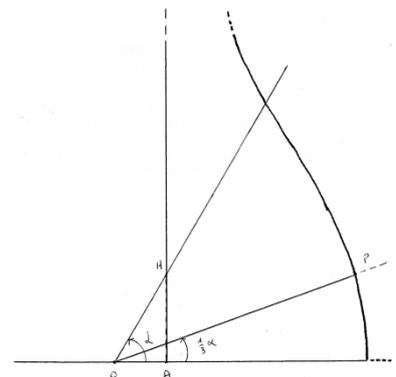
$$(x^2 + y^2)(x - h)^2 - k^2x^2 = 0$$

La curva è una curva razionale del quarto ordine, simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e presenta nel polo O una cuspidè se $k = h$ e un punto doppio isolato se $k < h$, un nodo, se $k > h$



La concoide della retta è stata studiata da Nicomede, che la applicò alla soluzione del problema della *trisezione dell'angolo*, che assieme alla duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio costituiscono i tre problemi classici dell'antica Grecia. Per inciso diamo qui il procedimento della trisezione dell'angolo col metodo della concoide della retta.

Indichiamo con α l'ampiezza dell'angolo con vertice in O che vogliamo dividere in tre parti. Prendiamo un punto A su uno dei lati dell'angolo e tracciamo la perpendicolare t in A a tale lato; questa interseca l'altro lato dell'angolo in un punto H . Costruiamo un arco di concoide avente polo in O , come retta base la retta t e come intervallo $k = 2 OH$. Da H si tracci la retta s che interseca l'arco della concoide



nel punto P. Congiungiamo il punto P con O e dimostriamo

che l'angolo POA è $\frac{1}{3} \alpha$.

Dimostrazione

Sia dato un sistema cartesiano monometrico ortogonale xOy e riferiamo l'angolo dato, di ampiezza α , a tale sistema in modo tale che il vertice dell'angolo coincida con il centro del sistema ed un lato coincida con il semiasse positivo delle ascisse: di equazione $y = 0$, mentre la retta sostegno del secondo lato ha equazione $y = x \operatorname{tang} \alpha$. Le coordinate di A sono $(a; 0)$ e l'equazione della retta t perpendicolare all'asse delle ascisse passante per A è $x = a$. La retta t interseca il secondo lato in H, le cui coordinate sono date dal sistema:

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tang} \alpha \\ x = a \end{cases}$$

Quindi H ha coordinate: $H(a; a \operatorname{tang} \alpha)$. La distanza $OH = \frac{a}{\cos \alpha}$, pertanto il fattore $k = \frac{2a}{\cos \alpha}$

Andando a sostituire a $k = \frac{2a}{\cos \alpha}$ ed $h = a$, nell'equazione cartesiana della concoide, si ha l'equazione della concoide di base la retta t , di polo O e di intervallo k :

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - \frac{4a^2}{\cos^2 \alpha} x^2 = 0$$

La retta s parallela all'asse delle ascisse passante per H ha equazione $y = a \operatorname{tang} \alpha$

Le coordinate del punto di intersezione P tra la concoide e la retta s è dato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x - a)^2 - \frac{4a^2}{\cos^2 \alpha} x^2 = 0 \\ y = a \operatorname{tang} \alpha \end{cases}$$

Che risulta un sistema di quarto grado.

La dimostrazione in coordinate cartesiane è alquanto complessa trattandosi di risolvere un sistema di quarto grado la cui equazione risolvente è una equazione di quarto grado completa, pertanto la imposteremo col metodo delle coordinate polari: cioè trasformeremo tali equazioni presenti nel sistema da coordinate cartesiane in coordinate polari, dove O il polo del sistema polare e un lato OA è l'asse polare. Il sistema che permette di passare da coordinate cartesiane a coordinate polari è:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

Dove ρ e ϑ , sono il modulo e l'anomaliadi un punto del piano.

Pertanto sostituendo nella prima equazione del sistema, si ha

$$\rho^2(\rho \cos \vartheta - a)^2 - \frac{4a^2}{\cos^2 \alpha} \rho^2 \cos^2 \vartheta = 0$$

Dividendo per ρ^2 e portando al secondo termine, si ha:

$$(\rho \cos \vartheta - a)^2 = \frac{4a^2}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \vartheta$$

Estraendo la radice quadrata ed esplicitando rispetto a ρ , si ha

$$\rho = \frac{2a \cos \vartheta + a \cos \alpha}{\cos \vartheta \cos \alpha}$$

Che è l'equazione in coordinate polari della conoide

Analogamente sostituendo nell'equazione della retta s , si ha $\rho \sin \vartheta = a \cdot \tan \alpha$; da cui esplicitando si ha $\rho = \frac{a \tan \alpha}{\sin \vartheta}$. Pertanto le coordinate del punto P in coordinate polari sono date dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho = \frac{2a \cos \vartheta + a \cos \alpha}{\cos \vartheta \cos \alpha} \\ \rho = \frac{a \tan \alpha}{\sin \vartheta} \end{cases}$$

Risolvendo

$$\frac{a \tan \alpha}{\sin \vartheta} = \frac{2a \cos \vartheta + a \cos \alpha}{\cos \vartheta \cos \alpha} \rightarrow \frac{a \sin \alpha}{\sin \vartheta \cos \alpha} = \frac{2a \cos \vartheta + a \cos \alpha}{\cos \vartheta \cos \alpha}$$

$$a \sin \alpha \cos \vartheta = 2a \sin \vartheta \cos \vartheta + a \cos \alpha \sin \vartheta$$

Dividendo ambo i termini per a e portando al primo membro il monomio $\cos \alpha \sin \vartheta$, si ha

$$\sin \alpha \cos \vartheta - \cos \alpha \sin \vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Applicando le regole della differenza e della duplicazione di goniometria si ha

$$\sin(\alpha - \vartheta) = \sin 2\vartheta$$

Risolvendo, limitatamente ad angoli del primo quadrante, si ha

$$\alpha - \vartheta = 2\vartheta \rightarrow \vartheta = \frac{1}{3}\alpha$$

Pertanto la semiretta OP forma con l'asse polare, che costituisce un lato dell'angolo dato, un angolo che è $\frac{1}{3}$ dell'angolo formato dalla semiretta OH, altro lato dell'angolo dato, sempre con l'asse polare. Quindi la conoide ci permette con questo procedimento di trisezionare un angolo dato.

-) *Concoide del cerchio, detta anche Lumaca di Pascal.*

Preso una circonferenza, fissiamo su di essa un punto O e su ogni retta t uscente da O consideriamo il punto A ulteriore intersezione della retta t con la circonferenza e i punti P di t tale che $AP = k$ (costante). Il luogo descritto dai punti P al variare della retta t si chiama concoide del cerchio.

Assumendo il punto O come origine e la retta passante per il centro della circonferenza rispettivamente l'origine e l'asse delle ascisse di un sistema di assi cartesiani ortogonali, ponendo r il raggio della circonferenza, determiniamo l'equazione del luogo.

Assumiamo il punto O e la retta passante per il centro della circonferenza rispettivamente come origine e asse delle ascisse di un sistema cartesiano ortogonale. L'equazione della circonferenza risulta: $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2rx = 0$ con r raggio della circonferenza.

L'equazione della retta uscente da O è: $t \equiv y = mx$, le coordinate del punto A, ulteriore intersezione di t con la circonferenza sono $A\left(\frac{2r}{1+m^2}; \frac{2rm}{1+m^2}\right)$; le coordinate di P, appartenendo a t sono $P(x; mx)$. Imponiamo la condizione: $AP = k$, cioè

$$\sqrt{\left(x - \frac{2r}{1+m^2}\right)^2 + \left(mx - \frac{2rm}{1+m^2}\right)^2} = k$$

Elevando ambo i termini al quadrato e raccogliendo, si ha

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{2r}{1+m^2}\right)^2 + m^2 \left(x - \frac{2r}{1+m^2}\right)^2 &= k^2 \\ (1+m^2) \left(x - \frac{2r}{1+m^2}\right)^2 &= k^2 \end{aligned}$$

Sostituendo il valore di $m = \frac{y}{x}$ ed operando si ha

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} \left(x - \frac{2rx^2}{x^2 + y^2}\right)^2 = k^2$$

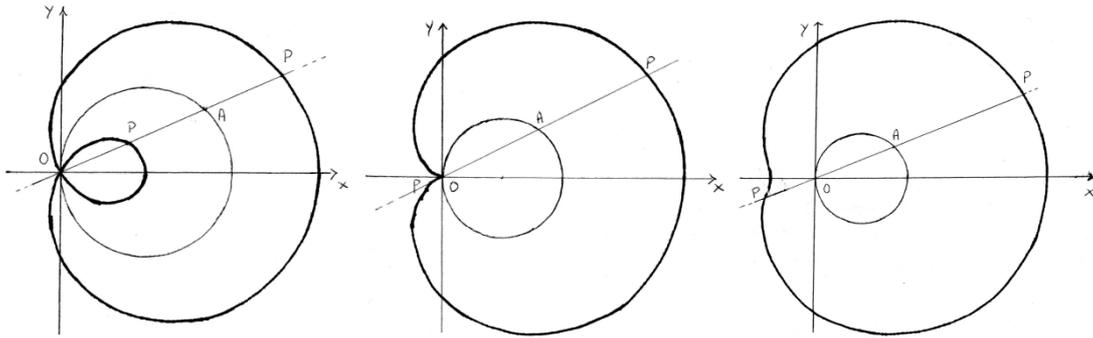
Raccogliendo,

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2 - 2rx)^2 = k^2$$

semplificando e trasportando, si ha l'equazione del luogo

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - k^2(x^2 + y^2) = 0$$

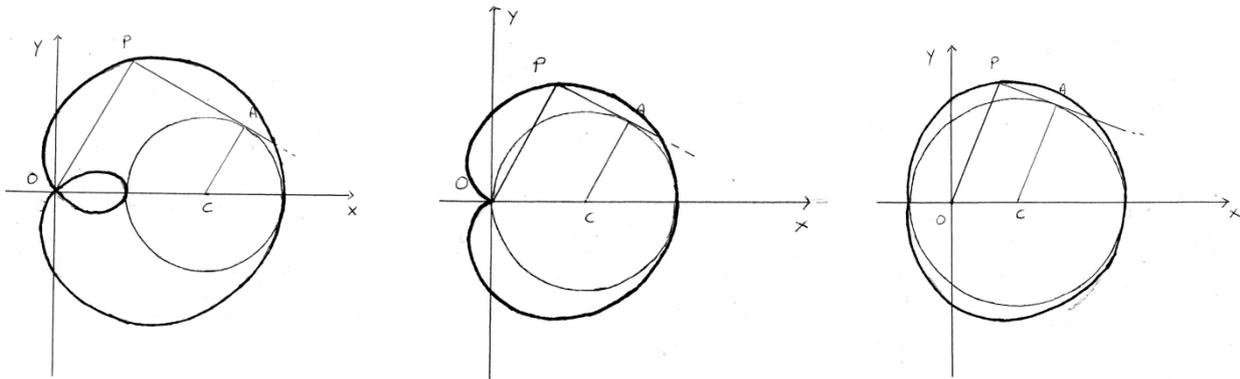
La curva è una curva razionale del quarto ordine, simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e presenta nel polo O un punto doppio e precisamente: un nodo, se $k < 2r$, una cuspide se $k = 2r$ e un punto doppio isolato se $k > 2r$.



Nel caso che $k = 2r$ (figura centrale) la concoide prende nome di *cardioide*, per la forma molto simile alla forma del cuore.

L'equazione polare in questo contesto è $\rho = 2r\cos\vartheta + k$; se $k = 2r$, si ha $\rho = 2r(\cos\vartheta + 1)$

La concoide può essere considerata la podaria della circonferenza rispetto ad un punto del piano appartenente o no alla circonferenza, nel caso che il punto appartiene alla circonferenza la concoide coincide con la cardioide. Sotto questo aspetto la curva viene chiamata *lumaca di Pascal*, perchè è stata studiata da Ethienne Pascal, padre di Blaise Pascal, che l'applicò alla trisezione dell'angolo.



Dato un sistema di assi cartesiani monometrico ortogonale xOy , sia Γ la circonferenza di centro $C(k; 0)$ e raggio r . Sia $P(x_p; y_p)$, appartenente alla retta s passante per O : $y = mx$. Tracciata la retta t perpendicolare ad s e passante per P : $y - y_p = -\frac{1}{m}(x - x_p)$, perché tale retta sia tangente alla circonferenza, la sua distanza dal centro C deve essere uguale al raggio:

$$\frac{\left| -y_p + \frac{1}{m}(k - x_p) \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}} = r$$

Moltiplicando ambo i termini per il denominatore del primo membro ed elevando al quadrato ambo i termini , si ha

$$\left[-y_p + \frac{1}{m}(k - x_p) \right]^2 = r^2 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right)$$

Posto $m = \frac{y_p}{x_p}$ ed operando , si ha

$$\left[-m y_p + (k - x_p) \right]^2 = r^2 (m^2 + 1)$$

$$(y_p^2 + x_p^2 - k x_p)^2 = r^2 (y_p^2 + x_p^2)$$

Facendo variare il punto P , otteniamo l'equazione del luogo:

$$(x^2 + y^2 - kx)^2 - r^2(x^2 + y^2) = 0$$

Che manifestamente è l'equazione di una cissoide, detta Lumaca di Pascal, ottenuta come podaria di una circonferenza rispetto al punto O. Solo che in questo contesto la circonferenza è tangente internamente alla cissoide nei punti semplici nel caso di $k \geq r$ di intersezione con l'asse delle ascisse, nel caso $k = r$ nel punto cuspidale O.

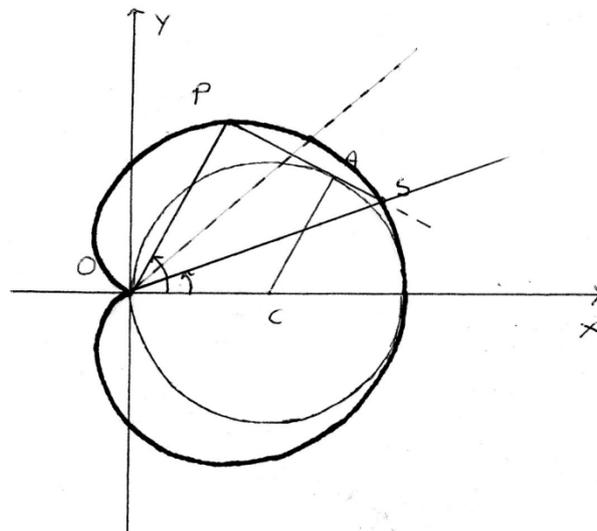
In quest'ultimo contesto l'equazione polare è

$$\rho = k \cos \vartheta + r$$

Se $k = r$, essa diviene

$$\rho = r(\cos \vartheta + 1)$$

La Lumaca di Pascal è stata applicata per la trisezione dell'angolo. Sia POX l'angolo da trisezionare se da P si conduce la tangente alla circonferenza di centro C, questa interseca la curva di Pascal in un ulteriore punto S, si dimostra che l'angolo SOX è la terza parte dell'angolo POX.



c) Trisettrice di Ippia o quadratrice di Dinostrato

Si consideri una circonferenza di centro O e raggio r e due raggi OA ed OB tra loro perpendicolari; sia P un punto della circonferenza e Q il punto della semiretta OB per cui si verifichi:

$$\overline{OQ} : \overline{OB} = \widehat{AP} : \widehat{AB}$$

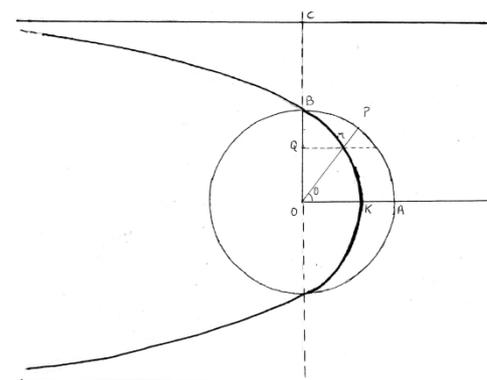
dove \widehat{AP} e \widehat{AB} sono archi della circonferenza.

Si conduca per il punto Q la parallela alla retta OA ed si indichi con M il punto di intersezione di essa con il raggio passante per P. Il luogo dei punti M, al variare di P sulla circonferenza si chiama *trisettrice di Ippia o quadratrice di Dinostrato*.

Tale curva studiata da Ippia è servita a questo per trisezionare un angolo, successivamente Dinostrato, fratello di Menecno, osservò una notevole proprietà del punto di intersezione della curva con il raggio OA che gli permise di risolvere la quadratura del cerchio: cioè di trovare un quadrato equivalente a quella del cerchio. E' chiaro che l'uso di curve al di fuori di rette e circonferenze violava il principio platonico e pertanto la risoluzione dei tre problemi classici continua ad assillare i matematici posteriori, greci e non, che sviluppano altre soluzioni con il risultato di portare alla scoperta di nuove curve.

Assunto un riferimento polare, avente polo in O ed asse polare la semiretta OA, le quantità presenti nella relazione

$$\overline{OQ} : \overline{OB} = \widehat{AP} : \widehat{AB}$$



valgono $OQ = OM \operatorname{sen}\vartheta = \rho \operatorname{sen}\vartheta$, $OB = r$, l'arco AP in radianti vale ϑ e l'arco AB essendo $\frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2}$; sostituendo nella relazione: $\rho \operatorname{sen}\vartheta : r = \vartheta : \frac{\pi}{2}$, da cui esplicitando rispetto a ρ si ha l'equazione polare della trisettrice è:

$$\rho = \frac{2r}{\pi} \frac{\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$$

Con ϑ l'angolo POA espresso in unità radianti e $\rho = OM$.

Limitatamente ai punti del cerchio base:

$$-\pi \leq \theta \leq \pi \text{ e } OC = 2r,$$

la curva è rappresentata nella figura accanto.

Ippia si servì di questa curva per trovare la terza parte di un angolo dato. Sia dato l'angolo XOY, sul lato OX si prenda il punto A e da O si traccia il segmento di perpendicolare OB ad OA tale che

$OB = OA$. Si tracci la curva trisettrice e sia M il punto di intersezione del lato OY dell'angolo dato con il raggio OP, dove P è il punto di intersezione di OY con la circonferenza di centro O e raggio OA. Si divida OQ in tre parti congruenti OV, VW, WQ e si traccino dai punti V e W le parallele ad OA, queste intersecano la curva in M_1 ed M_2 , si dimostra che l'angolo AOM_1 è la terza parte dell'angolo XOY: infatti $OQ = \rho_M \operatorname{sen}\vartheta$

ma $\rho_M = \frac{2r}{\pi} \frac{\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$, sostituendo si ha $OQ = \frac{2r\vartheta}{\pi}$.

$OV = \frac{1}{3}OQ = \frac{2r\vartheta}{3\pi}$. Sia α il valore in radianti dell'angolo AOM_1 , $OV = \rho_{M_1} \operatorname{sen}\alpha$; ma

$\rho_{M_1} = \frac{2r}{\pi} \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, sostituendo si ha $OV = \frac{2r\alpha}{\pi}$. Uguagliando le due quantità relative ad OV si ha

$$\frac{2r\alpha}{\pi} = \frac{2r\vartheta}{3\pi}$$

Dividendo ambo i termini per $\frac{2r}{\pi}$, si ha: $\alpha = \frac{1}{3}\vartheta$

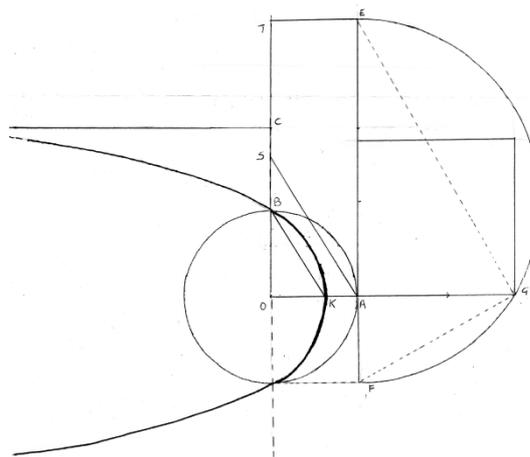
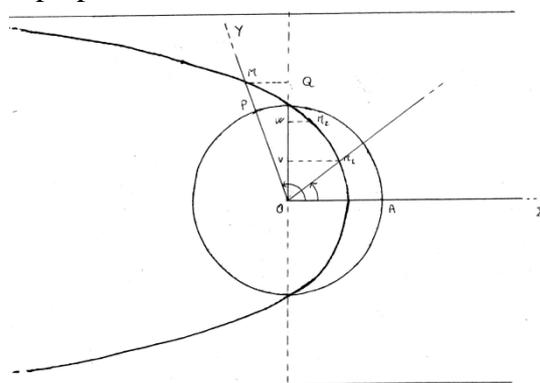
Dimostrato si servì di questa curva per trovare un quadrato equivalente ad un cerchio di raggio r.

Questi osservò che per ϑ che tende a zero il punto M coincide con il punto K. Considerata la relazione

$\rho = \frac{2r}{\pi} \frac{\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$, il rapporto $\frac{\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$ per ϑ che tende a zero si va sempre più approssimando ad 1, allora per $\vartheta = 0$ $OK = \frac{2r}{\pi}$. Da K questi traccia il segmento KB e successivamente

traccia da A la parallela a KB, che interseca il prolungamento di OB in S. Considera i triangoli rettangoli KOB e AOS. Questi, avendo tutti gli angoli congruenti, sono simili. Imposta la proporzionalità fra i cateti:

$$OK : OA = OB : OS, \text{ da cui } OS = \frac{OA \cdot OB}{OK} = \frac{r^2}{\frac{2r}{\pi}} = \frac{\pi r}{2}$$



Sempre sul prolungamento del raggio OB prende un punto T tale che $OT = 2 OS = \pi r$.
 Si costruisce il rettangolo OTEA di base OA e altezza OT e calcola l'area: $\mathcal{A} = OA \cdot OT = \pi r^2$.
 Trovato il rettangolo, si trova il quadrato equivalente, applicando il secondo teorema di Euclide: si costruisce una semicirconferenza di diametro $EF = TO+OA$, da A traccia la perpendicolare ad EF, che interseca la semicirconferenza in G. Il triangolo EGF è un triangolo rettangolo, perché inscritto in una semicirconferenza di diametro EF, e GA è l'altezza relativa all'ipotenusa. Per il secondo teorema di Euclide $GA^2 = AE \cdot AF = OT \cdot OA = \pi r^2$ e quindi Dinostrato riesce a costruire un quadrato di area l'area del cerchio di raggio r.

- Curve trascendenti

-) *Cicloide*

Definizione. Si chiama cicloide il luogo dei punti del piano descritto da un punto fisso di un cerchio che rotola senza strisciare sopra una retta.

La cicloide può essere allungata, normale od accorciata a secondo che il punto fisso ha distanza dal centro del cerchio maggiore, uguale o minore del raggio del cerchio stesso.

Per determinare l'equazione del luogo, dobbiamo considerare che il punto fisso è soggetto a due movimenti (o trasformazioni) uno traslatorio solidale con il centro del cerchio ed uno rotatorio intorno al centro del cerchio. La traslazione del punto P (x ; y) avviene su una traiettoria rettilinea

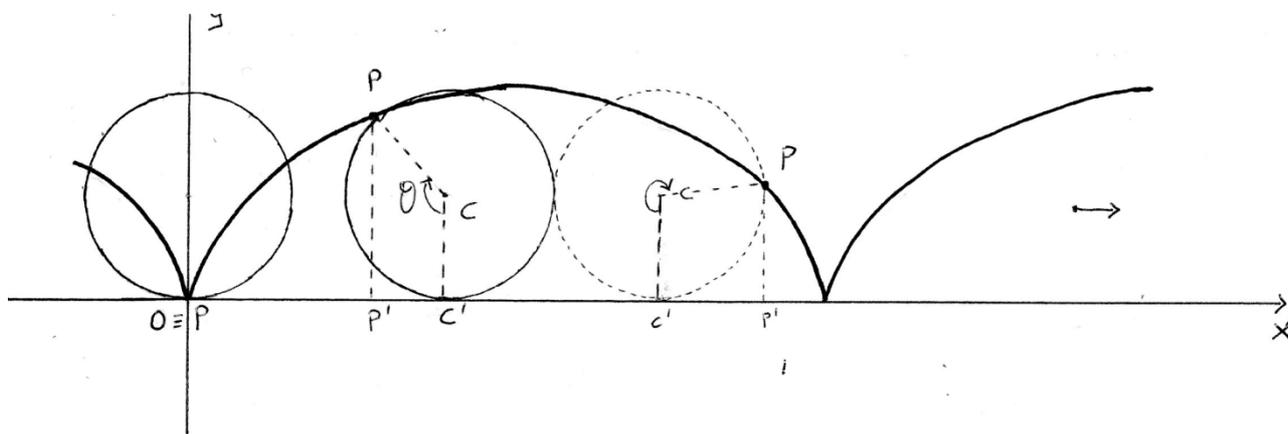
costituita da punti della circonferenza di raggio OP: $\begin{cases} x' = x + r\vartheta \\ y' = y + r \end{cases}$, mentre il punto effettua una rotazione attorno al centro del cerchio in senso orario $\begin{cases} x = -h\text{sen}\vartheta \\ y = -h\text{cos}\vartheta \end{cases}$, operando la composizione dei due moti o delle due trasformazioni si hanno le due equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\vartheta - h\text{sen}\vartheta \\ y = r - h\text{cos}\vartheta \end{cases}$$

Con r raggio del cerchio, h la distanza di P dal centro del cerchio e ϑ il parametro: l'angolo formato tra la verticale condotta dal centro del cerchio alla retta su cui rotola il cerchio ed il raggio vettore OP, espresso in radianti.

Se $h=r$ la cicloide è normale, se $h > r$ la cicloide è allungata, se $h < r$ la cicloide è accorciata:

Diamo il grafico per $h = r$: cioè il punto P si trova sulla circonferenza che rotola.



La tangente alla cicloide in un punto P è data dalla bisettrice dell'angolo formato dalla tangente in P al cerchio e la semiretta di origine P e parallela all'asse x nel verso positivo (la paternità di questa proposizione ha creato un forte contrasto tra la scuola francese e quella di G.Galilei: tra Roberval e Torricelli)

Se consideriamo la cardioide come podaria del cerchio di raggio r, per cui la sua equazione polare è

$$\rho = r(\cos\vartheta + 1)$$

se consideriamo la cicloide normale il cui cerchio che rotola ha raggio r, per cui la sua equazione parametrica è

$$\begin{cases} x = r(\vartheta - \text{sen}\vartheta) \\ y = r(1 - \cos\vartheta) \end{cases}$$

Se consideriamo i raggi delle circonferenze base delle due curve, si prova che per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, la lunghezza della cardioide e della cicloide sono uguali, mentre la area racchiusa dalla cicloide e dalla retta su cui rotola è il doppio di quella racchiusa dalla cardioide.

Diamo qui per inciso, rimandando allo studio di Analisi le dimostrazioni, le formule relative alla lunghezza di curve e alla misura delle aree, le cui funzioni sono continue e derivabili.

Lunghezza:	forma cartesiana:	$y = f(x)$	\rightarrow	$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
	forma polare:	$\rho = \varphi(\vartheta)$	\rightarrow	$L = \int_a^\beta \sqrt{[\varphi(\vartheta)]^2 + [\varphi'(\vartheta)]^2} d\vartheta$
	forma parametrica:	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$	\rightarrow	$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$
Area:	forma cartesiana:	$y = f(x)$	\rightarrow	$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$
	forma polare:	$\rho = \varphi(\vartheta)$	\rightarrow	$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_a^\beta [\varphi(\vartheta)]^2 d\vartheta$
	forma parametrica:	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$	\rightarrow	$\mathcal{A} = \int_a^b g(t) f'(t) dt$

$$\begin{aligned} \text{Relativamente alla cardioide: } L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{[r(\cos\vartheta + 1)]^2 + [-r\text{sen}\vartheta]^2} d\vartheta = 2r \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\vartheta} d\vartheta = \\ &= 4r \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}} d\vartheta = 4r \int_0^\pi \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 8r \int_0^\pi \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2} = 8r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Relativamente alla cicloide: } L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{[r(1 - \cos\vartheta)]^2 + [r\text{sen}\vartheta]^2} dt = 2r \int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos\vartheta} d\vartheta = \\ &= 4r \int_0^\pi \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}} d\vartheta = 4r \int_0^\pi \text{sen} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 8r \int_0^\pi \text{sen} \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2} = 8r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Relativamente alla cardioide: } \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [r(\cos\vartheta + 1)]^2 d\vartheta = \frac{r^2}{2} \int_0^\pi [\cos^2\vartheta + 2\cos\vartheta + 1] d\vartheta = \\ &= \frac{r^2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{1+\cos 2\vartheta}{2} + 2\cos\vartheta + 1 \right] d\vartheta = \frac{r^2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\cos 2\vartheta}{2} + 2\cos\vartheta + \frac{3}{2} \right] d\vartheta = \frac{3}{2} \pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Relativamente alla cicloide: } \mathcal{A} &= 2 \int_0^\pi r(1 - \cos\vartheta)r(1 - \cos\vartheta) dt = 2r^2 \int_0^\pi [1 - \cos\vartheta]^2 d\vartheta = \\ &= 2r^2 \int_0^\pi [\cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta + 1] d\vartheta = 2r^2 \int_0^\pi \left[\frac{\cos 2\vartheta}{2} - 2\cos\vartheta + \frac{3}{2} \right] d\vartheta = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

NB. Le lunghezze degli archi di curva sono $8r$, questo sta ad indicare che se r è un numero razionale sia la cardioide che la cicloide sono rettificabili con l'uso degli strumenti platonici:

riga e compasso, mentre la circonferenza base non è rettificabile vista la presenza nel calcolo della sua lunghezza di π : numero trascendente.

- *Spirale di Archimede*

Def. La spirale di Archimede è il luogo dei punti del piano descritto da un punto P che si muove di moto uniforme su una semiretta di origine O partendo da O, mentre tale semiretta ruota intorno ad O anch' essa di moto uniforme.

Dalla definizione possiamo dedurre la proprietà : la distanza del punto P dall'origine O della semiretta è direttamente proporzionale all'angolo di rotazione. Pertanto fissato il punto O e l'asse polare , relativamente a tale sistema il punto ha coordinate $P(\rho ; \vartheta)$: l' equazione del luogo risulta

$$\rho = a\vartheta.$$

E' facile provare che due spire consecutive della spirale di Archimede intercettano su ogni semiretta uscente dal polo O un segmento di lunghezza costante, pari a $2\pi a$: detto passo della spirale. Siano P e P' due punti successivi di intersezione della spirale con la retta uscente da O. Sia $OP < OP'$. Siano $P(\rho_1; \vartheta_1)$ e $P'(\rho_2; \vartheta_2)$ le coordinate polari , l'angolo $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi$. Ora i punti per essere elementi della spirale devono soddisfare con le loro coordinate l'equazione della spirale e pertanto: $\rho_1 = a\vartheta_1$ e $\rho_2 = a\vartheta_2 = a(\vartheta_1 + 2\pi)$. Facendo la differenza dei moduli si ha: $\rho_2 - \rho_1 = a\vartheta_2 - a\vartheta_1 = a(\vartheta_1 + 2\pi) - a\vartheta_1 = a[(\vartheta_1 + 2\pi) - \vartheta_1] = 2\pi a$

B. Cavalieri scoperse una connessione tra tale spirale e la parabola $x^2 = ay$. Infatti questi osservò che, se si prende $OP = r$ e $PP' = 2\pi r$, tra i punti dell'arco OP di parabola e i punti della spirale nel primo giro OP' sono in corrispondenza biunivoca e l'area compresa nell'intervallo $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$:cioè nel primo giro della spirale, è esattamente uguale all'area del segmento parabolico intercettato dalla corda OP. Verifichiamo tale osservazione, relativamente all'area, con l'ausilio oggi dell' Analisi.

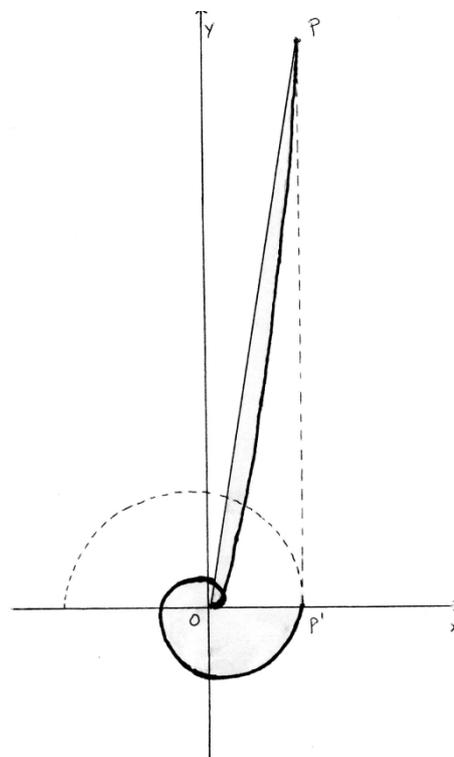
Calcoliamo Il valore del parametro a presente nelle due equazioni, sfruttando l'equazione della parabola. A tal proposito sia xOy un sistema cartesiano monometrico ortogonale di centro O e ascissa la retta sostegno di OP' ed ordinata la perpendicolare ad OP' , passante per O. L'equazione della parabola è del tipo sopra scritto:

$y = \frac{1}{a}x^2$. Le coordinate di P sono $P(r ; 2\pi r)$, pertanto sostituendo nell'equazione si ha $2\pi r = \frac{1}{a}r^2$, da cui

$a = \frac{r}{2\pi}$. L'equazione polare della spirale di Archimede, sostituendo il valore di a , è $\rho = \frac{r}{2\pi} \vartheta$;

mentre quella della parabola è $y = \frac{2\pi}{r}x^2$

Calcoliamo ora l'area racchiusa dalla spirale e l'area del segmento parabolico.



$$\text{Area della spirale: } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{2\pi} \vartheta \right)^2 d\vartheta = \frac{r^2}{8\pi^2} \left| \frac{1}{3} \vartheta^3 \right|_0^{2\pi} = \frac{r^2}{8\pi^2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{r^2 \pi}{3}$$

Area del segmento parabolico . Una delle proprietà della parabola incontrate afferma che Il punto S dell'arco di parabola in cui la tangente è parallela alla corda ha per ascissa il punto medio delle ascisse degli estremi dell'arco , pertanto il punto S ha coordinate $\left(\frac{r}{2} ; \frac{r\pi}{2} \right)$

L'area del segmento parabolico in oggetto è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo OPS:

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{r}{2} & \frac{r\pi}{2} & 1 \\ r & 2\pi r & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \left| \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2} \right| = \frac{2}{3} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Appare manifesta l'uguaglianza delle due aree.

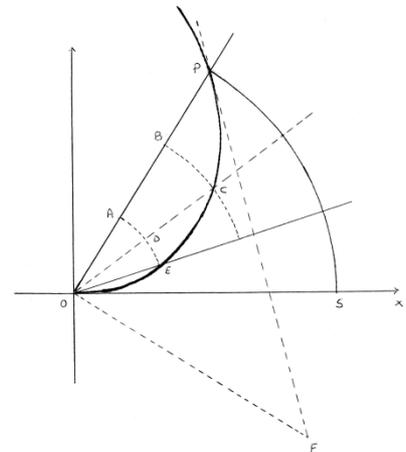
Se ora consideriamo la seguente trasformazione polare: $\begin{cases} x = r \\ y = r\vartheta \end{cases}$, appare manifesta la corrispondenza biunivoca tra i punti di OP dell'arco di parabola ed i punti OP' dell'arco di spirale. Infatti sostituendo in $x^2 = ay$, otteniamo $r^2 = ar\vartheta$. Dividendo ambo i termini per r si ottiene $r = a\vartheta$ l'equazione polare della spirale; così sostituendo nell'equazione della spirale

la trasformata inversa: $\begin{cases} r = \frac{x}{\vartheta} \\ \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$, si ha $x = a \frac{y}{x}$. Moltiplicando ambo i termini per x si ha $x^2 = ay$ cioè l'equazione della parabola.

Tale curva è stata applicata da Archimede per risolvere la trisezione di un angolo e la quadratura del cerchio:

trisezione dell'angolo:

Consideriamo l'arco di spirale del primo quadrante e disponiamo l'angolo da trisezionare in modo che il vertice coincida col polo O ed un lato con l'asse polare OX, l'altro lato intersecherà la spirale nel punto P. Si divida il segmento OP in tre parti congruenti , siano A e B i punti di OP di suddivisione; con centro in O e raggi rispettivamente OA e OB si traccino due archi di circonferenza , che intersecano la spirale nei punti E e C. Archimede dimostra che le semirette di origine O e passanti per E e C trisecano l'angolo dato XOP.



Quadratura del cerchio

Consideriamo sempre l'arco di spirale del primo quadrante e sia P un suo punto. Da O tracciamo la retta perpendicolare al segmento OP e da P tracciamo la retta tangente alla spirale. Sia F il punto di intersezione della tangente e della perpendicolare prima tracciate, Archimede dimostra che OF è congruente all'arco PS di circonferenza, di centro O e raggio OP, che sottende l'angolo SOP. Se si sceglie il punto P come intersezione della spirale con la retta a 90°, il segmento OF sarà esattamente uguale ad un quarto della circonferenza di centro O e raggio OP. pertanto l'area del cerchio è equivalente all'area del triangolo di base 4·OF e altezza OP.

Una semplice trasformazione geometrica, vista precedentemente, permetterà di sostituire il triangolo con un quadrato. Di qui la quadratura del cerchio.

3 INVILUPPO, EVOLUTA ED EVOLVENTE

- Inviluppo:

Sia data l'equazione di una famiglia F di curve piane

$$f(x, y, k) = 0$$

con x ed y variabili indipendente e dipendente e k parametro di variabilità. Se k figura nell'equazione di primo grado, la famiglia F si riduce ad un fascio di curve. Diciamo che k è un parametro di variabilità nel senso che ad un determinato valore reale corrisponde una determinata curva, se varia il valore si dice che varia la curva. E' evidente che al variare di k varieranno in generale tanto la posizione quanto la forma delle curve, mantenendo tuttavia costante il tipo o natura: cioè se una curva della famiglia F è una retta, al variare di k si hanno infinite rette, così pure se una curva è una circonferenza, al variare di k si hanno infinite circonferenze.

L'insieme delle curve definite da $f(x, y, k) = 0$ costituisce una famiglia F semplicemente infinita di curve: per il fatto che nell'equazione figura un sol parametro.

Si considerino nella famiglia F due curve $f(x, y, k_i) = 0$ e $f(x, y, k_i + \Delta k) = 0$. Intersecando le due curve, le coordinate dei loro eventuali punti comuni sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, k_i) = 0 \\ f(x, y, k_i + \Delta k) = 0 \end{cases}$$

Facendo tendere Δk a zero, le due curve tendono a sovrapporsi. Supposto che la funzione $f(x, y, k)$ sia continua e derivabile rispetto a k , per il teorema dell'incremento finito si ha

$$f(x, y, k + \Delta k) = f(x, y, k) + f'_k(x, y, k + \vartheta k) \Delta k \quad \text{con } 0 < \vartheta < 1$$

Tenuto conto che $f(x, y, k) = 0$ e che $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} f'_k(x, y, k + \vartheta k) = f'_k(x, y, k)$, possiamo scrivere: $f(x, y, k + \Delta k) = f'_k(x, y, k) \Delta k$; essendo $\Delta k \neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} f(x, y, k) = 0 \\ f'_k(x, y, k) = 0 \end{cases}$$

Attribuendo successivamente a k tutti i valori che esso può assumere nel suo campo di variabilità, l'ultimo sistema fornisce, di volta in volta, l'insieme dei punti di intersezione della curva di parametro k con quella infinitamente vicina. In generale il luogo di tali punti è una curva che è detta *inviluppo* della famiglia F di curve.

In Analisi il significato geometrico della derivata di una funzione è il coefficiente angolare della tangente nel punto di derivazione, pertanto possiamo affermare che, data una famiglia di curve, l'inviluppo della famiglia è la curva tangente a tutte le curve della famiglia stessa.

Regola: L'equazione della *curva involuppo* di una famiglia semplicemente infinita di curve piane si ottiene eliminando il parametro tra l'equazione della famiglia e quella che si ottiene uguagliando a zero la derivata del suo primo membro rispetto al parametro.

Esempio:

- 1) La parabola è la curva involuppo della famiglia di rette ad essa tangenti.

Sia data la parabola $y = x^2$ e sia $P(\alpha; \alpha^2)$ un suo punto. Il coefficiente angolare della retta tangente in P alla parabola è $m = 2\alpha$, pertanto la famiglia di rette tangenti ha equazione:

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$$

che ridotta a forma implicita risulta: $2\alpha x - y - \alpha^2 = 0$, la cui derivata della funzione a primo membro rispetto al parametro α risulta $2x - 2\alpha$, uguagliando a zero tale derivata e ponendola a sistema con la famiglia si ha:

$$\begin{cases} 2\alpha x - y - \alpha^2 = 0 \\ 2x - 2\alpha = 0 \end{cases}$$

Risolvendo ed eliminando il parametro si ha $\begin{cases} 2x^2 - y - x^2 = 0 \\ \alpha = x \end{cases}$, si ottiene la parabola di

partenza

$$y = x^2$$

- 2) Data la famiglia di rette $3(\alpha - 1)x + (2\alpha - 1)y + \alpha^2 + 2\alpha = 0$, determinare la curva piana involuppo di tale famiglia di rette.

Risoluzione.

Calcoliamo la derivata del primo membro rispetto al parametro α : $3x + 2y + 2\alpha + 2$.

Poniamo uguale a zero tale derivata e impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 3(\alpha - 1)x + (2\alpha - 1)y + \alpha^2 + 2\alpha = 0 \\ 3x + 2y + 2\alpha + 2 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo eliminando il parametro α .

$$\begin{cases} 3\left[\left(-\frac{3}{2}x - y - 1\right) - 1\right]x + \left[2\left(-\frac{3}{2}x - y - 1\right) - 1\right]y + \left(-\frac{3}{2}x - y - 1\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}x - y - 1\right) = 0 \\ \alpha = -\frac{3}{2}x - y - 1 \end{cases}$$

$$-\frac{9}{2}x^2 - 3xy - 6x - 3xy - 2y^2 - 3y + \frac{9}{4}x^2 + y^2 + 1 + 3xy + 3x + 2y - 3x - 2y - 2 = 0$$

$$-\frac{9}{4}x^2 - 3xy - y^2 - 6x - 3y - 1 = 0$$

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 + 24x + 12y + 4 = 0$$

Essa è l'equazione di una parabola non degenera, ruotata e traslata non passante per il centro del sistema di riferimento.

- 3) Data la famiglia di circonferenze : $x^2 + y^2 - \alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$ con $r^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 + 1 > 0$:
cioè $-\frac{2}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{2}{\sqrt{3}}$, determinare la curva piana inviluppo di tale famiglia di circonferenze:

Risoluzione:

Calcoliamo la derivata del primo membro rispetto al parametro α : $-x + 2\alpha$

Poniamo uguale a zero tale derivata e impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \alpha x + \alpha^2 - 1 = 0 \\ -x + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

Risolviamo eliminando il parametro α .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = 0 \\ \alpha = \frac{x}{2} \end{cases}$$

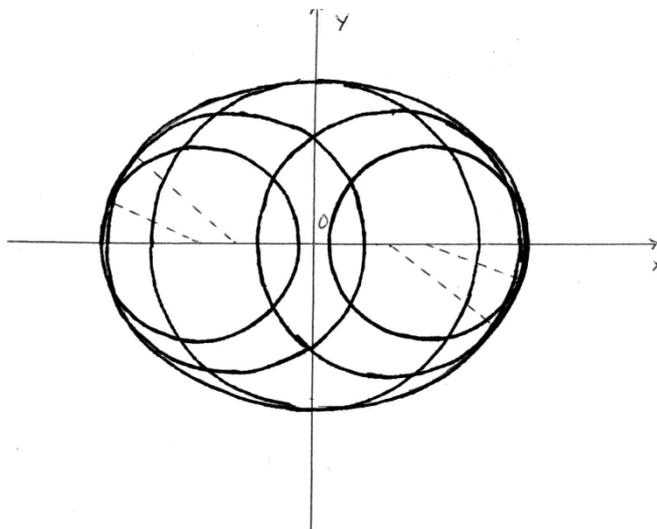
$$x^2 + y^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - 1 = 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 - 1 = 0$$

La curva inviluppo è un'ellisse, che è riducibile a forma canonica:

$$\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Il cui grafico è



- 4) Data la famiglia di ellissi : $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} - 1 = 0$ con parametro $t > \frac{1}{2}$, determinare la curva piana inviluppo di tale famiglia di ellissi.

Risoluzione

Calcoliamo la derivata prima della funzione al primo membro:

$$-\frac{2t}{t^4}x^2 + \frac{2(1-t)}{(1-t)^4}y^2$$

Poniamo tale derivata uguale a zero, semplifichiamola, l'equazione ottenuta la mettiamo a sistema con la famiglia di ellissi:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} - 1 = 0 \\ \frac{2x^2}{t^3} - \frac{2y^2}{(1-t)^3} = 0 \end{cases}$$

Nella seconda equazione ricaviamo il parametro t in funzione di x ed y :

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^3 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1-t}{t} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{t} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + 1} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}$$

Sostituendo nella prima equazione si ha:

$$\frac{x^2 \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^2}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{y^2 \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^2}{y^{\frac{4}{3}}} = 1$$

Semplificando si ha

$$x^{\frac{2}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^2 + y^{\frac{2}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1$$

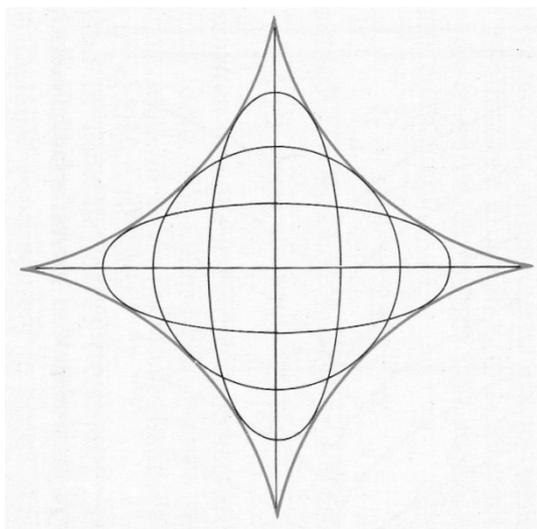
Raccogliendo e fattorizzando si ha

$$\left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 1$$

Estraendo la radice cubica ad ambo i termini, che è l'unica soluzione reale è:

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$$

Che risulta l'equazione di una curva detta *asteroide*, il cui grafico è



NB Da questi ultimi due esempi appare chiaro che, anche dai grafici, che le curve involuppo sono tangenti ad (almeno) una curva della famiglia di curve data ed inversamente ogni curva della famiglia di curve data è tangente (almeno) in un punto della sua curva involuppo

- Evoluta ed evolvente

Def. Sia data nel piano una curva Ω , a curvatura non nulla, si chiama *evoluta* di Ω il luogo Γ dei centri di curvatura di Ω .

Se la curva Ω è a curvatura costante: cioè è una circonferenza, il luogo Γ si riduce ad un punto: precisamente il centro della circonferenza; se Ω non è a curvatura costante, il luogo Γ è una curva.

Siano P un punto della curva Ω ed M il centro di curvatura di Ω in P, si dimostra che la retta sostegno di MP è perpendicolare o normale ad Ω in P ed è tangente in M a Γ . Da questa proposizione discende che l'evoluta Γ è l'involuppo delle normali ad Ω .

Def. Noto il luogo Γ , si dice che Ω , e tutte le curve parallele ad Ω , è un'evolvente di Γ .

Dalle due definizioni discende che, data la curva Ω , la sua evoluta Γ è unica; mentre, data la curva Γ , le sue evolventi sono infinite e parallele. Le evolventi di una data curva costituiscono una famiglia di curve che hanno in comune le normali. Si dimostra che la lunghezza di un arco MN di evoluta Γ risulta uguale alla differenza dei raggi di curvatura relativi ai punti P e Q di una evolvente dei quali M ed N sono i centri di curvatura. Da qui discende che i segmenti di normale compresi tra una evolvente e la successiva hanno lunghezza costante.

Ricordando quanto si è detto nella teoria dei fasci di conica a proposito di cerchio osculatore, dove per inciso si è trattato il problema della curvatura di una curva e del raggio di curvatura, sia xOy un sistema di assi cartesiani monometrico ortogonale,

A) se si suppone che della curva Ω sia data l'equazione cartesiana:

$$y = f(x)$$

che risulta continua e derivabile almeno due volte, allora l'equazione dell'evoluta in forma parametrica, dove il parametro in questo contesto è la x, risulta:

$$\begin{cases} X = x - f'(x) \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)} \\ Y = f(x) + \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)} \end{cases}$$

Eliminando il parametro x nelle due equazioni si ottiene la forma cartesiana del luogo Γ

B) se si suppone che della curva Ω siano date le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

che risultano continue e derivabili almeno due volte, allora l'equazione dell'evoluta Γ di Ω

assume la forma parametrica:

$$\begin{cases} X = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\Delta} \\ Y = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\Delta} \end{cases}$$

Dove $\Delta = \det \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{bmatrix}$ con \dot{x} e \dot{y} derivate prime, \ddot{x} e \ddot{y} derivate seconde.

Eliminando il parametro t nelle due equazioni si ottiene la forma cartesiana del luogo Γ

C) se si suppone che della curva Ω siano date l'equazione polare

$$\rho = \varphi(\vartheta)$$

che risultano continue e derivabili almeno due volte, allora l'equazione dell'evoluta Γ di Ω assume la forma polare:

$$\begin{cases} X = \rho \cos \vartheta - \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2}{\Delta} (\dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta) \\ Y = \rho \sin \vartheta + \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2}{\Delta} (\dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta) \end{cases}$$

Dove $\Delta = \det \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{bmatrix}$ con $\dot{x} = \dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta$ e $\dot{y} = \dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta$ derivate prime, $\ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \vartheta - 2\dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta$ e $\ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \vartheta + 2\dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta$ derivate seconde. Eliminando il parametro ϑ nelle due equazioni si ottiene la forma cartesiana del luogo Γ

D)

Esempio:

1) Sia data la parabola $y = x^2$, determinare la sua evoluta.

Risoluzione

Determiniamo le sue derivate prima e seconda: $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$

Andiamo a sostituire nel sistema parametrico:

$$\begin{cases} X = x - 2x \frac{1 + 4x^2}{2} \\ Y = x^2 + \frac{1 + 4x^2}{2} \end{cases}$$

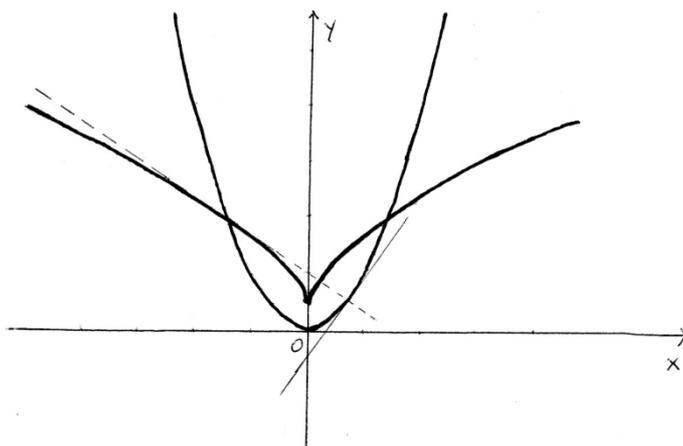
Risolvendo, eliminando alla fine il parametro x ,

$$\begin{cases} X = -4x^3 \\ Y = \frac{6x^2 + 1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{\frac{X}{4}} \\ Y = 3 \left(-\sqrt[3]{\frac{X}{4}} \right)^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'equazione dell'evoluta è

$$Y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{X^2}{2}} + \frac{1}{2}$$

Il cui grafico è



Vogliamo verificare che tale curva coincide con involuppo delle normali alla parabola data. Sia $P(\alpha; \alpha^2)$ un punto della parabola. La normale alla parabola nel punto P ha equazione:

$$y - \alpha^2 = -\frac{1}{2\alpha}(x - \alpha)$$

La cui forma implicita è

$$y - \alpha^2 + \frac{1}{2\alpha}(x - \alpha) = 0$$

Questa equazione costituisce l'equazione di una famiglia di rette. Determiniamo la derivata parziale rispetto al parametro α della funzione a primo membro:

$$-2\alpha - \frac{2x}{4\alpha^2}$$

Facciamo sistema, dopo aver uguagliato a zero la derivata trovata:

$$\begin{cases} y - \alpha^2 + \frac{1}{2\alpha}(x - \alpha) = 0 \\ -2\alpha - \frac{2x}{4\alpha^2} = 0 \end{cases}$$

Ricavando α dalla seconda equazione e sostituendola nella prima equazione abbiamo:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{16}} + \frac{x}{2\sqrt[3]{\frac{x}{4}}} + \frac{1}{2} \\ \alpha = -\sqrt[3]{\frac{x}{4}} \end{cases}$$

L'equazione della curva involuppo della famiglia di rette normali alla parabola, dopo aver razionalizzato e semplificato, è:

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}$$

Pertanto la curva evoluta della parabola e la curva involuppo delle normali alla parabola presentano la stessa equazione.

- 2) Sia data l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determinare la sua evoluta.

Risoluzione:

Trasformiamo l'equazione dell'ellisse dalla forma cartesiana alla forma parametrica:

$$\begin{cases} x = a \cos \vartheta \\ y = b \sin \vartheta \end{cases}$$

Dove il parametro ϑ varia nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

Calcoliamo di questa equazione parametrica le derivate prima e seconda rispetto al parametro ϑ

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \sin \vartheta \\ \dot{y} = b \cos \vartheta \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ddot{x} = -a \cos \vartheta \\ \ddot{y} = -b \sin \vartheta \end{cases}$$

Determiniamo ora l'equazione parametrica dell'evoluta:

$$\begin{cases} X = a \cos \vartheta - \frac{b \cos \vartheta (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)}{a b \sin^2 \vartheta + a b \cos^2 \vartheta} \\ Y = b \sin \vartheta - \frac{a \sin \vartheta (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)}{a b \sin^2 \vartheta + a b \cos^2 \vartheta} \end{cases}$$

Raccogliendo ai denominatori e applicando la formula fondamentale di goniometria, si ha

$$\begin{cases} X = a \cos \vartheta - \frac{\cos \vartheta (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)}{a} \\ Y = b \sin \vartheta - \frac{\sin \vartheta (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)}{b} \end{cases}$$

Operando il m.c.d. a secondo membro delle equazioni, raccogliendo poi al numeratore ed applicando la formula inversa di quella fondamentale di goniometria, si ha

$$\begin{cases} X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \vartheta \\ Y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \vartheta \end{cases}$$

Da cui facendo il rapporto tra i due membri si ha:

$$\text{tang}^3 \vartheta = -\frac{aY}{bX} \quad \rightarrow \quad \text{tang} \vartheta = -\left(\frac{aY}{bX}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ricordando le formule di goniometria: $\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 \vartheta}}$, sostituendo nella prima delle equazioni del sistema parametrico, otteniamo l'equazione cartesiana dell'evoluta:

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{aY}{bX}\right)^{\frac{2}{3}}}} \right]^3$$

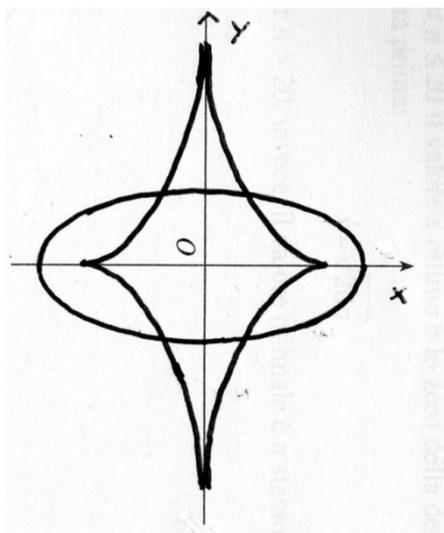
Operando algebricamente si ha

$$\left[\sqrt{1 + \left(\frac{aY}{bX}\right)^{\frac{2}{3}}} \right]^3 = \frac{a^2 - b^2}{aX} \quad \rightarrow \quad 1 + \left(\frac{aY}{bX}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}}{(aX)^{\frac{2}{3}}} \quad \rightarrow \quad (abX)^{\frac{2}{3}} + (abY)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

Dividendo ambo i membri per $(ab)^{\frac{2}{3}}$, otteniamo l'equazione dell'evolva della famiglia di ellissi:

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Che risulta l'equazione della curva già incontrata: l'*asteroide*:



4 CURVE DEDUCIBILI DALLE CONICHE

Le equazioni canoniche e generali delle coniche si prestano moltissimo a risolvere situazioni grafiche relative a

-) equazioni irrazionali dove una volta resa razionale con opportuni elevamenti a potenze o a razionalizzazione se sono equazioni fratte le equazioni risultano di secondo grado nelle variabili x

-) equazioni ove figurano valori assoluti, purché sciolti i valori assoluti le equazioni si riducono ad equazioni di secondo grado nelle variabili x ed y .

Facciamo una serie di esemplificazioni:

1) $y - 1 = 2\sqrt{1 - x^2}$ si tratta di una curva di equazione irrazionale.

Per tracciare il grafico eleviamo al quadrato ambo i termini tenendo conto delle condizioni. Tale equazione algebricamente risulta equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \\ 4x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Di cui la prima disequazione è relativa alla condizione di realtà del radicale, la seconda è relativa alla positività del radicale, la terza equazione è il risultato dell'elevamento al quadrato. Questa equazione non è altro che

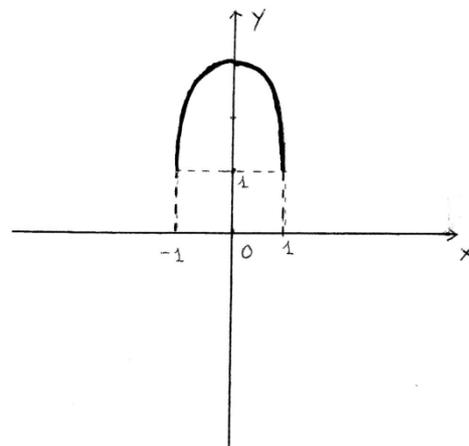
l'equazione di una conica e precisamente di un'ellisse traslata di centro $C(0; 1)$ e assi

paralleli agli assi cartesiani e precisamente $x = 0$ e $y = 1$. Pertanto l'equazione data è rappresentata

sul piano cartesiano da un arco di ellisse compreso $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 1$. Per tracciare l'ellisse, riduciamola a forma canonica col metodo del completamento dei quadrati:

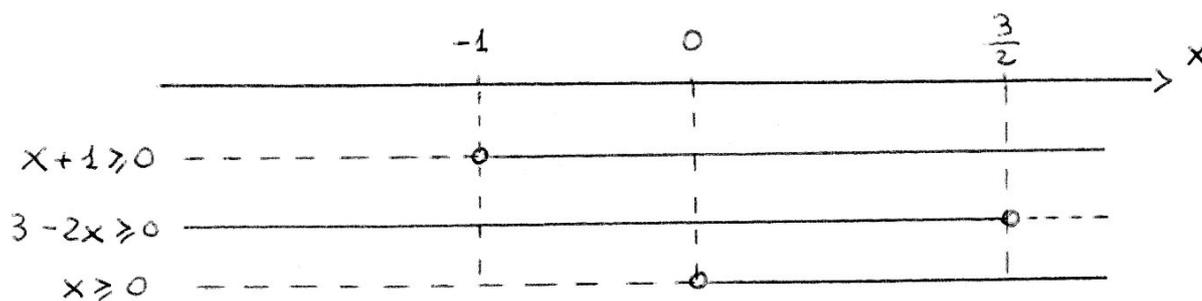
$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

con $a = 1$ e $b = 2$. Pertanto l'insieme dei punti del piano che soddisfano l'equazione data è rappresentato dal ramo di ellisse a fianco disegnato.



2) $y|x + 1| = |3 - 2x| - |x|$ si tratta di una curva di equazione in due variabili con moduli.

Intanto cerchiamo di sciogliere i moduli, studiando i segni delle espressioni che figurano nei moduli e riportiamoli su un grafico:

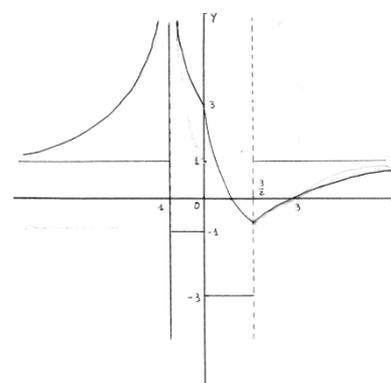


Nei quattro intervalli in cui rimane diviso l'asse delle ascisse l'equazione della curva diventa:

per $x < -1$ o $x \geq \frac{3}{2}$ si ha $y = \frac{x-3}{x+1}$

per $-1 \leq x < 0$ si ha $y = \frac{3-x}{x+1}$

per $0 \leq x < \frac{3}{2}$ si ha $y = \frac{3-3x}{x+1}$



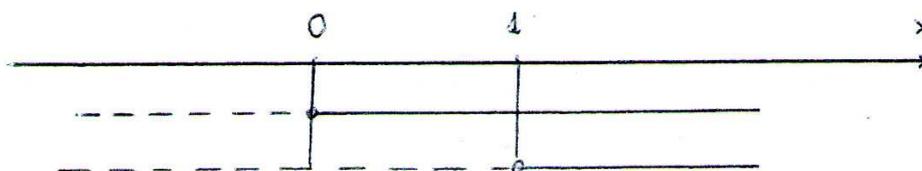
che risultano equazioni di iperboli omografiche

o iperboli equilatera traslate riferite agli asintoti

, il cui grafico complessivo è:

- 3) $y = -\sqrt{4 - x|x| + |x - 1|} = 0$ si tratta di una curva la cui equazione è irrazionale con moduli.

Intanto cerchiamo di sciogliere i moduli, studiando i segni delle espressioni che figurano nei moduli e riportiamoli su un grafico:



Nei tre intervalli in cui rimane diviso l'asse delle ascisse l'equazione della curva diventa:

per $x < 0$ $y = -\sqrt{x^2 - x + 5}$ equivalente al sistema $\begin{cases} x^2 - x + 5 \geq 0 \quad \forall x \\ y \leq 0 \\ x^2 - y^2 - x + 5 = 0 \end{cases}$

per $0 \leq x < 1$ $y = -\sqrt{5 - x - x^2}$ equivalente al sistema $\begin{cases} 5 - x - x^2 \geq 0 \quad \forall x \\ y \leq 0 \\ x^2 + y^2 + x - 5 = 0 \end{cases}$

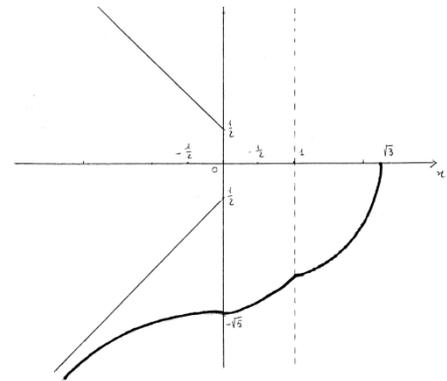
per $x \geq 1$ $y = -\sqrt{3+x-x^2}$ equivalente al sistema
$$\begin{cases} 3+x-x^2 \\ y \leq 0 \\ x^2+y^2-x-3=0 \end{cases}$$

che risultano: la prima iperbole equilatera

traslata riferita agli assi; la seconda e la terza cir-

conferenze rispettivamente di centri $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$

e raggi $\frac{\sqrt{21}}{2}$ e $\frac{\sqrt{13}}{2}$ il cui grafico definitivo è



Dai tre esempi riportati appare evidente che il tracciamento di curve, deducibili dalle equazioni delle coniche, si effettua dopo aver operato algebricamente e tenendo costantemente sotto controllo le condizioni imposte dagli operatori presenti nelle equazioni proposte. Una volta impostato il sistema delle condizioni e dell'equazione risolvente, che deve risultare un'equazione di secondo grado in due variabili, si tracciano il grafico o eventualmente i grafici relativi ai diversi sistemi impostati limitatamente agli intervalli imposti. Il grafico o l'unione dei singoli grafici per intervalli dà il grafico definitivo della curva richiesta.

5 INVERSIONE CIRCOLARE

Fissato in un piano un punto O (centro di inversione) ed una costante $k \neq 0$, si faccia corrispondere ad ogni punto P del piano (diverso da O) il punto P' che appartiene alla retta congiungente O con P ed è tale che si abbia :

$$OP \cdot OP' = k$$

La corrispondenza biunivoca e simmetrica che pone in relazione P e P' si chiama *trasformazione per raggi vettori reciproci o inversione* di centro O e potenza k . I due punti P e P' si dicono punti reciproci. Si nota che quando P , muovendosi su una retta qualunque, tende ad O , P' si allontana indefinitamente, per cui tutti i punti impropri del piano si possono considerare come corrispondenti di O . Posto $k > 0$, i punti P per cui vale $OP^2 = k$ sono i punti uniti della corrispondenza ed essi costituiscono un cerchio Γ , avente centro in O e raggio $r = \sqrt{k}$, che si chiama cerchio di inversione e di conseguenza la trasformazione possiamo chiamarla *inversione circolare*. Pertanto l'inversione circolare è un caso particolare della trasformazione per raggi vettori reciproci.

Def. Data la circonferenza Γ di centro O e raggio r , si chiama *inversione circolare* la corrispondenza biunivoca che associa ad ogni punto P del piano, distinto da O , il punto P' allineato con OP tale che

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

La circonferenza Γ è detta *circonferenza base*.

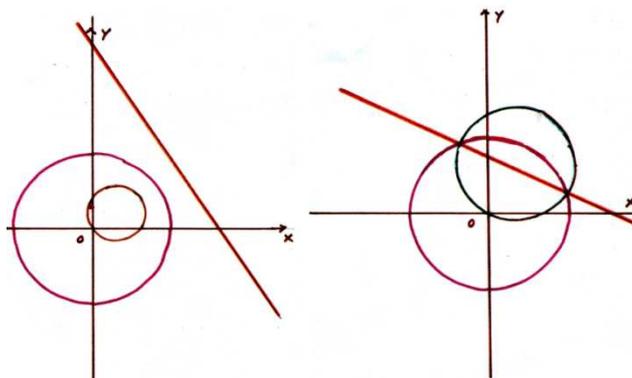
Proprietà:

-) Ad ogni punto P interno al cerchio determinato dalla circonferenza Γ corrisponde un punto P' esterno a detto cerchio e viceversa

-) Ad una retta passante per O corrisponde se stessa

-) Ad una retta non passante per O corrisponde una circonferenza passante per O e viceversa

(diamo i grafici relativi a questa proposizione)



-) Ad una circonferenza non passante per O corrisponde una circonferenza non passante per O .

-) Ad angoli formati da due rette o da due circonferenze o in generale da curve corrispondono angoli congruenti formati dalle figure corrispondenti.

Punti uniti e figure unite:

-) Punti uniti: I punti uniti della trasformazione sono solo i punti della circonferenza base Γ

-) Figure unite:

- 1) rette passanti per il centro di inversione O
- 2) la circonferenza base Γ
- 3) le circonferenze ortogonali alla circonferenza base Γ .

Equazione:

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali che abbia come origine il punto O , indicati con x ed y le coordinate di P e con x' ed y' le coordinate del punto corrispondente P' , si ha facilmente che queste ultime si ottengono in funzione delle coordinate di P dalle equazioni

$$\mathfrak{I} = \begin{cases} x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ y \rightarrow \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

Esercizi:

- 1) Data l'equazione dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, trovare la trasformata di tale ellisse in una inversione circolare di centro $O(0; 0)$ e raggio 1.

Risoluzione

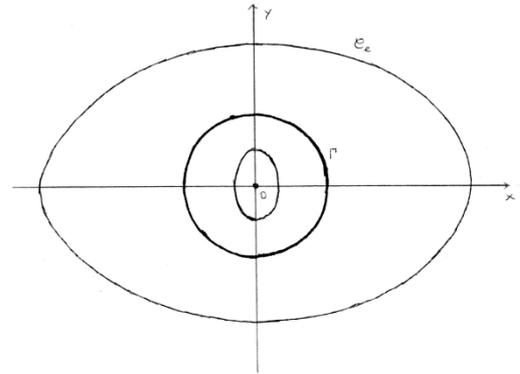
Applico la trasformazione per curve: $\frac{x^2}{9(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{4(x^2+y^2)^2} = 1$, operando e riducendola in forma implicita si ha

$$36(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - 9y^2 = 0$$

In coordinate polari si ha $\rho = \frac{\sqrt{4+5\text{sen}^2\vartheta}}{6}$ con $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

Che risulta l'equazione di una curva del quarto ordine.

E' una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse in O ha un punto isolato e interseca l'asse delle ascisse $(-\frac{1}{3}; 0)$ e $(\frac{1}{3}; 0)$, mentre interseca l'asse delle y in $(0; -\frac{1}{2})$ e $(0; \frac{1}{2})$.



- 2) Data l'equazione della parabola di equazione $x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$, trovare la trasformata di tale parabola in una inversione circolare di centro $O(0; 0)$ e raggio 2.

Risoluzione

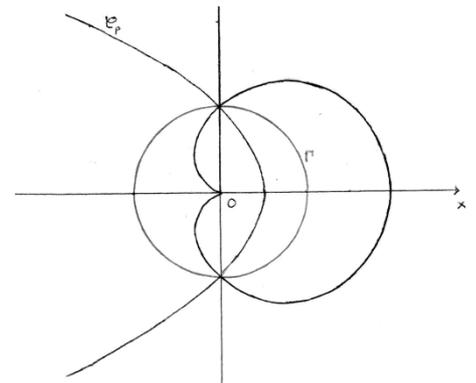
Applico la trasformazione per curve: $\frac{4x}{x^2+y^2} = -\frac{1}{4} \frac{16y^2}{4(x^2+y^2)^2} + 1$, operando e riducendola in forma implicita si ha

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) - 4y^2 = 0$$

In coordinate polari si ha $\rho = 2(\cos\vartheta + 1)$ con $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

Che risulta l'equazione di una curva del quarto ordine: cardioide

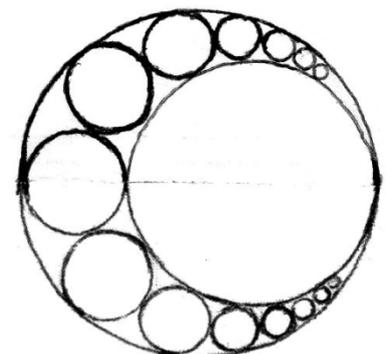
E' una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse in O ha una cuspid e interseca l'asse delle ascisse $(4; 0)$, mentre interseca l'asse delle y in $(0; 2)$ e $(0; -2)$.



NB. L'inversione circolare applicata alla parabola ci ha permesso di effettuare una trasformazione dei punti della parabola e di trovare una nuova curva d'ordine superiore: curva già studiata come luogo geometrico

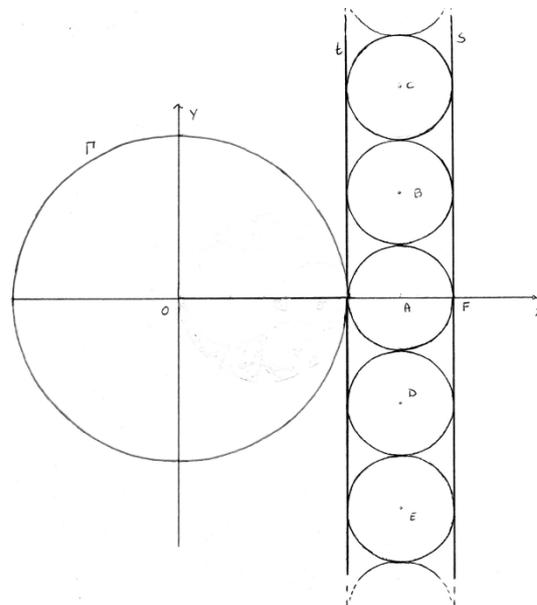
Problema di Pappo

L'inversione circolare ti permette di risolvere in modo semplice ed elegante il seguente problema:



“ Sia data una circonferenza Γ di diametro AB, e due circonferenze Γ' e Γ_0 con centri su AB, tangenti tra loro e, internamente, a Γ . Inscrivere una successione di circonferenze,

tutte tangenti sia a Γ che a Γ' , e definite induttivamente dalla condizione che Γ_{n+1} sia tangente anche a Γ_n . Siano dati un sistema cartesiano monometrico ortogonale xOy ed un circolo Γ di inversione di equazione $x^2 + y^2 = r^2$. Si tracci la retta t , tangente a Γ nel punto di intersezione di Γ con l'asse delle ascisse: t ha equazione $x = r$. Si tracci poi una retta s parallela a t : s ha equazione $x = r + a$, essendo a la distanza di s da t . Internamente alla striscia di piano determinata da s e da t si traccino una successione di circonferenze tangenti alle rette t ed s e tali che Γ_{n+1} sia tangente anche a Γ_n .



$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_A : x^2 + y^2 - (2r + a)x + r^2 + ar = 0$$

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_B : x^2 + y^2 - (2r + a)x - 2ay + ar + a^2 = 0$$

$$\Gamma_{-1} \equiv \Gamma_D : x^2 + y^2 - (2r + a)x + 2ay + r^2 + ar + a^2 = 0$$

$$\Gamma_2 \equiv \Gamma_C : x^2 + y^2 - (2r + a)x - 4ay + r^2 + ar + 4a^2 = 0$$

$$\Gamma_{-2} \equiv \Gamma_E : x^2 + y^2 - (2r + a)x + 4ay + r^2 + ar + 4a^2 = 0$$

$$\Gamma_3 \equiv : x^2 + y^2 - (2r + a)x - 6ay + r^2 + ar + 9a^2 = 0$$

$$\Gamma_{-3} \equiv : x^2 + y^2 - (2r + a)x + 6ay + r^2 + ar + 9a^2 = 0$$

.....

$$\Gamma_n \equiv : x^2 + y^2 - (2r + a)x - 2nay + r^2 + ar + n^2a^2 = 0$$

$$\Gamma_{-n} \equiv : x^2 + y^2 - (2r + a)x + 2nay + r^2 + ar + n^2a^2 = 0$$

Si consideri l'inversione circolare relativa al circolo Γ :

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ y \rightarrow \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

e si trasformino le rette t ed s , nonché le circonferenze $\Gamma_0, \Gamma_1; \Gamma_{-1}; \Gamma_2, \dots$, determinando in sequenza i corrispondenti (che sono due circonferenze) delle rette parallele t, s , e delle circonferenze Γ_i

$$t' \equiv \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} = r \rightarrow x^2 + y^2 - rx = 0$$

$$s' \equiv \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} = r + a \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{r^2}{r+a} x = 0$$

PROGRAMMI IN TURBO PASCAL

Per il tracciamento di coniche , soggette anche a trasformazioni

- 1) Questo programma permette di tracciare il grafico di una conica nota la sua equazione Dando informazioni sul tipo e la specie; inoltre su richiesta viene tracciato il grafico della sua canonica dandoti di questa l'equazione.

```

PROGRAM coniche_generali;
USES crt,graph;
label 1;
const unita:real=20; passo:real=0.005; colore:byte=13;
      quadratura=1.077; min_unita_puntini=20;
      min_unita_tacche=10;
      sfasax:real=0; sfasay:real=0;
var xmin,xmax,ymin,ymax,x2,y2,xmed,ymed:integer;
    x,y,a,b,c,d,e,f,rang,osx,osy,ounita,w,w1,w2,w3:real;
    tipo,specie:string;
    comples:boolean;risp,r,t:char;
    sin,des,su,giu,j,j1,j2,rx,ry:real;
    s,aa,bb,cc,dd,ee,ff:string;
PROCEDURE attiva_grafica;
var gd,gm:integer;
begin
  gd:=detect;
  initgraph(gd,gm,'c:\bgi');
  xmin:=0;ymin:=0;xmax:=getmaxx;ymax:=getmaxy;
  xmed:=(xmax-xmin) DIV 2;
  ymed:=(ymax-ymin) DIV 2;
END;
PROCEDURE presenta;
const lato=1000;
      q=640;
      l=480;
      xo=-500;
      yo=-500;
var xs,ys,resto:integer;
    x,y:real;
begin
  clrscr;
  attiva_grafica;
  setbkcolor(1);
  setcolor(10);
  settxtjustify(1,1);
  settxtstyle(1,0,6);
  outtextxy(320,200,'CONICHE GENERALI');

```

```

settextstyle(2,0,5);
outtextxy(320,260,'a cura del');
settextstyle(2,0,8);
outtextxy(320,310,'Prof. VACCARO GIOVANNI');
READLN;
for xs:=0 to 320 do
begin
  x:=xo+lato/640*xs;
  x:=int(sqrt(abs(x)));
  for ys:=0 to 1 do
  begin
    y:=yo+lato/640*ys;
    y:=int(sqrt(abs(80+y)));
    resto:=round((x+y)) mod 16;
    putpixel (xs,ys,resto);
    putpixel (640-xs,ys,resto);
  end;
end;
readln;
closegraph;
END;
FUNCTION CONV_X(X:REAL):INTEGER;
begin
  conv_x:=round((x+sfasax)*unita+Xmed);
end;
FUNCTION CONV_Y(Y:REAL):INTEGER;
begin
  if (y>-ymax) and (y<ymax) then
    conv_y:=round(Ymed-(y+sfasay)*unita*quadratura);(*quadratura*)
end;
FUNCTION FNR1(X:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b)-4*a*c;
  if delta<>0 then
    begin
      rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
      ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
    end;
  if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b-sqrt(delta))/(2*c)*(x-rx)+ry
  else comples:=true;
  fnr1:=func;
end;
FUNCTION FNR11(y:REAL):REAL;
var delta,func:real;

```

```

begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b)-4*a*c;
  if delta<>0 then
    begin
      rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
      ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
    end;
  if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b+sqrt(delta))/(2*a)*(y-ry)+rx
  else comples:=true;
  fnr1:=func;
end;
FUNCTION FNR2(X:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b)-4*a*c;
  if delta<>0 then
    begin
      rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
      ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
    end;
  if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b+sqrt(delta))/(2*c)*(x-rx)+ry
  else comples:=true;
  fnr2:=func;
END;
FUNCTION FNR22(y:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b)-4*a*c;
  if delta <> 0 then
    begin
      rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
      ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
    end;
  if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b-sqrt(delta))/(2*a)*(y-ry)+rx
  else comples:=true;
  fnr22:=func;
ED;
FUNCTION FNY(X:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*x+e)-4*c*(a*sqr(x)+d*x+f);
  if (delta>=0) and (c<>0) then func:=(-b*x-e+sqrt(delta))/(2*c)
  else comples:=true;
  fny:=func;

```

```

END;
FUNCTION FN1(Y:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*y+d)-4*a*(c*sqr(y)+e*y+f);
  if (delta>=0) and (a<>0) then func:=(-b*y-d+sqrt(delta))/(2*a)
    else comples:=true;
  fn1:=func;
END;
FUNCTION FN2Y(X:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*x+e)-4*c*(a*sqr(x)+d*x+f);
  if (delta>=0) and (c<>0) then func:=(-b*x-e-sqrt(delta))/(2*c)
    else comples:=true;
  fn2y:=func;
END;
FUNCTION FN2X(Y:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*y+d)-4*a*(c*sqr(y)+e*y+f);
  if (delta>=0) and (a<>0) then func:=(-b*y-d-sqrt(delta))/(2*a)
    else comples:=true;
  fn2x:=func;
END;
FUNCTION FN3Y(X:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*x+e)-4*c*(a*sqr(x)+d*x+f);
  if (delta>=0) and (c=0) and (x<>0) then func:=(-(d*x+f)/(b*x+e))
    else comples:=true;
  fn3y:=func;
END;
FUNCTION FN3X(Y:REAL):REAL;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*y+d)-4*a*(c*sqr(y)+e*y+f);
  if (delta>=0) and (a=0) and (y<>0) then func:=(-(e*y+f)/(b*y+d))
    else comples:=true;
  fn3x:=func;
END;
PROCEDURE ASSI;
var IX,IY,ym,xm,nl: integer;

```

```

begin
  xm:=Xmed;
  ym:=Ymed;
  setcolor(7);rectangle(0,0,xmax-xmin,ymax-ymin);
  setcolor(14);
  line(conv_x(0),ymax,conv_x(0),0);
  line(xmax-xmin,conv_y(0),0,conv_y(0));
  line(conv_x(0),0,conv_x(0)+5,0+7);
  line(conv_x(0),0,conv_x(0)-5,0+7);
  line(xmax-xmin,conv_y(0),xmax-xmin-7,conv_y(0)-5);
  line(xmax-xmin,conv_y(0),xmax-xmin-7,conv_y(0)+5);
  setcolor(10);
  sin:=-sfasax-(640/unita/2);
  des:=-sfasax+(640/unita/2);
  su:=-sfasay-(480/unita/2);
  giu:=-sfasay+(480/unita/2);
  if unita>min_unita_tacche then
  begin
  for ix:=round(sin+0.5) to round(des-0.5) do
    line(conv_x(ix),conv_y(0)-2,conv_x(ix),conv_y(0)+2);
  for iy:=round(su+0.5) to round(giu-0.5) do
    line(conv_x(0)-2,conv_y(iy),conv_x(0)+2,conv_y(iy));
  end;
  if unita>min_unita_puntini then
  for ix:=round(sin+0.5) to round(des-0.5) do
  for iy:=round(su+0.5) to round(giu-0.5) do
    putpixel(conv_x(ix),conv_y(iy),9);
  setcolor(7);rectangle(0,0,xmax-xmin,ymax-ymin);
  END;
PROCEDURE grafico(xmn,ymn,xmx,ymx:integer; a,b,c,d,e,f:real);
var u:string;
begin
  xmax:=xmx;
  ymax:=ymx;
  xmin:=xmn;
  ymin:=ymn;
  xmed:=(xmax-xmin) DIV 2;
  ymed:=(ymax-ymin) DIV 2;
  setviewport(xmin,ymin,xmax,ymax,clipon);
  passo:=1/unita;
  ASSI;
  sin:=-sfasax-(640/unita/2);
  des:=-sfasax+(640/unita/2);
  su:=-sfasay-(480/unita/2);
  giu:=-sfasay+(480/unita/2);
  x:=sin+passo;
  repeat
    x2:=conv_x(x);
    y2:=conv_y(Fny(x));
    if not(comples) then
      begin
        putpixel(x2,y2,colore);

```

```

    end;
    x:=x+passo;
until x>des;
x:=sin+passo;
repeat
    x2:=conv_x(x);
    y2:=conv_y(Fn2y(x));
    if not(comples) then
        begin
            putpixel(x2,y2,colore);
        end;
    x:=x+passo;
until x>des;
if (a=0) and (c=0) then
begin
x:=sin+passo;
repeat
    x2:=conv_x(x);
    y2:=conv_y(Fn3y(x));
    if not(comples) then
        begin
            putpixel(x2,y2,colore);
        end;
    x:=x+passo;
until x>des;
end;
x:=sin+passo;
repeat
    x2:=conv_x(x);
    y2:=conv_y(Fnr1(X));
    if not(comples) then
        begin
            putpixel(x2,y2,7);
        end;
    x:=x+passo;
until x>des;
x:=sin+passo;
repeat
    x2:=conv_x(x);
    y2:=conv_y(Fnr2(X));
    if not(comples) then
        begin
            putpixel(x2,y2,7);
        end;
    x:=x+passo;
until x>des;
passo:=1/(unita*quadratura);

```

```

y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fnx(y));
  y2:=conv_y((y));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fnr11(y));
  y2:=conv_y((y));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fnr22(y));
  y2:=conv_y((y));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fn2x(y));
  y2:=conv_y((y));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
if (c=0) and (a=0) then
begin
y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fn3x(y));
  y2:=conv_y((y));
  if not(comples) then
    begin

```

```

    putpixel(x2,y2,colore);
end;
y:=y+passo;
until y>giu;
end;
setcolor(10);
if (j1<>0) then
    circle(conv_x(rx),conv_y(ry),2);
setcolor(12);
if (a=0) and (c=a) and (b<>0) and ((e<>0) or (d<>0)) then
    begin
        setcolor(6);
        line(conv_x(-e/b),0,conv_x(-e/b),ymax);
        line(0,conv_y(-d/b),xmax,conv_y(-d/b));
    end;
setcolor(7);
outtextxy(xmax-xmin-15,conv_y(0)+5,'x');
outtextxy(conv_x(0)+5,10,'y');
outtextxy(conv_x(0)+5,conv_y(0)+5,'o');
setcolor(10);
str(unita:3:3,u);
outtextxy(xmax-xmin-110,ymax-ymin-10,'Unit...: '+u);
setviewport(0,0,getmaxx,getmaxy,clipoff);
end;
PROCEDURE immetti;
begin
    textbackground(1);
    clrscr;
    textcolor(15);
    gotoxy(10,4);
    write('Questo programma ti permette di tracciare il grafico di una');
    textcolor(4);
    gotoxy(10,6); writeln(' '+chr(4)+' CONICA GENERALE e a richiesta l"eq. CANONICA'+chr(4));
    textcolor(15);
    gotoxy(10,8); write('nota la sua equazione, dandoti informazioni sul tipo e');
    gotoxy(10,10); write(' sulla specie, anche nei casi degeneri. ');
    textcolor(14);
    gotoxy(10,12); writeln(' Inserisci i sei coefficienti dell"equazione generale:');
    textcolor(11);
    gotoxy(11,15); writeln(' x2+ ( )xy + ( )y2+ ( )x + ( )y + ( ) = 0');
    gotoxy(12,15);readln(a);
    gotoxy(20,15);readln(b);
    gotoxy(30,15);readln(c);
    gotoxy(39,15);readln(d);
    gotoxy(48,15);readln(e);
    gotoxy(57,15);readln(f);
    j:=a*c*f+b/2*e/2*d/2+d/2*b/2*e/2-(d/2*d/2*c+a*e/2*e/2+b/2*b/2*f);

```

```

j1:=a*c-b/2*b/2;
j2:=a+c;
if (4*a*c-b*b<>0) then
  begin
    rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
    ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
  end;
if j1<0 then
  begin
    w:=(j2+sqrt(sqr(j2)-4*j1))/2;
    w1:=(-j2+sqrt(sqr(j2)-4*j1))/2;
    w2:=j/j1;
    w3:=0;
  end
else
  if j1>0 then
    begin
      w:=(j2-sqrt(sqr(j2)-4*j1))/2;
      w1:=(j2+sqrt(sqr(j2)-4*j1))/2;
      w2:=j/j1;
      w3:=0;
    end
  end
else
  begin
    w:=j2;
    w1:=0;
    w2:=0;

    w3:=-2*sqrt(-j/j2);
  end;
end;
procedure casi;
begin
  if j<>0 then rang:=3
  else
    if (j1<>0) or (b*e-2*d*c <>0) or (4*c*f-e*e<>0) or (4*a*f-d*d<>0)
      or (2*b*f-d*e<>0)
    then rang:=2
    else
      if (j2<>0) then rang:=1;
  if rang=3 then begin
    tipo:='Conica non degenera non spezzata' end
  else begin
    if (j1>0) then tipo:='Ellisse degenera e precisamente degenera in';
    if (j1>0) and (a=c) then
      tipo:='Circonferenza degenera e precisamente degenera in';
    if (j1=0) then tipo:='Parabola degenera e precisamente degenera in';
    if (j1<0) then tipo:='Iperbole degenera e precisamente degenera in';
  end;
end;

```

```

end;
if (rang=3) and (a=c) and ((j>0) and (j1>0) and (j2>0)) or
((j<0) and (j1>0) and (j2<0))
then tipo:='Circonferenza priva di parte reale';

if (rang=3) and (a<>c) and ((j>0) and (j1>0) and (j2>0)) or
((j<0) and (j1>0) and (j2<0))
then tipo:='Ellisse priva di parte reale';
if (rang=3) and ((j>0) and (j1>0) and (j2<0)) or
((j<0) and (j1>0) and (j2>0))
then
begin
if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Ellisse dotata di parte reale traslata e ruotata';
if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Ellisse dotata di parte reale ruotata';
if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Ellisse dotata di parte reale traslata';
if (b=0) and (a=c) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Circonferenza traslata';
if (b=0) and (a=c) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Circonferenza centrata';
if (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f<0) then
specie:='Ellisse centrata o canonica';
end;
if (rang=3) and ((j>0) and (j1=0) and (j2<0)) or
((j<0) and (j1=0) and (j2>0))
then
begin
if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Parabola traslata e ruotata';
if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Parabola ruotata';
if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Parabola traslata';
if (b=0) and (c=0) and (d=0) and (e<>0) and (f=0) then
specie:='Parabola canonica';
end;
if (rang=3) and (j1<0) and (j2=0)
then
begin
if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole equilatera traslata e ruotata';
if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Iperbole equilatera ruotata';
if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole equilatera traslata';

```

```

    if (b=0) and ((d=0) or (e=0)) then
specie:='Iperbole equilatera riferita agli assi';
    if (b<>0) and((a=0) and (c=0)) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole equilatera omografica riferita agli asintoti';
    if (b<>0) and ((a=0) and (c=0)) and ((d=0) or (e=0)) then
specie:='Iperbole equilatera riferita agli asintoti';
    end;
if (rang=3) and ((j<>0) and (j1<0) and (a<>-c)) then
    begin
    if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole non equilatera traslata e ruotata';
    if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Iperbole non equilatera ruotata';
    if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole non equilatera traslata';
    if (b=0) and ((d=0) or (e=0)) then
specie:='Iperbole non equilatera centrata';
    end;
if (j<>0) and (b=0) and (a=c) and (d=0) and (e=0) and (f>0) then
    specie:='Coppia di rette immaginarie coniugate non parallele';
if (rang=2) and (j1>0) and (j2<>0)
then specie:='Coppia di rette immaginarie coniugate non parallele';
if (rang=2) and (j1<0) and (j2=0)
    then specie:='Coppia di rette reali non parallele ma perpendicolari';
if (rang=2) and (j1<0) and (j2<>0)
    then specie:='Coppia di rette reali non parallele ne perpendicolari';
if (j=0) and (j1<0) and (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f=0) then
    specie:='Coppia di rette reali incidenti';
if (j=0) and (j1<0) and (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f=0) and (a=-c) then
    specie:='Coppia di rette reali incidenti e perpendicolari';
if (j=0) and (j1>0) and (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f=0) then
    specie:='Coppia di rette immaginarie';
if (rang=2) and (j1=0) and (j2<>0)
    then specie:='Coppia di rette parallele (reali od immaginarie) entrambe proprie';
if (rang=2) and (j1=0) and (j2=0)
    then specie:='Coppie di rette reali (parallele o perpendicolari) non entrambe proprie';
if (rang=1) and (j1=0) and (j2<>0)
then begin if (d=0) and (e=0) and (f=0)
    then specie:='Retta doppia (reale) propria ';
    if (d<>0) or (e<>0) or (f<>0) then
specie:='Coppia di rette parallele e distinte ( reali o no)';
    end;
if (rang=1) and (j1=0) and (j2=0) then specie:='Retta doppia impropria';
end;
procedure rosso;
begin
    setrgbpalette(1,0,0,20);
    setfillstyle(1,1);

```

```

bar(0,getmaxy-30,getmaxx,getmaxy);
bar(0,0,getmaxx,9);
setcolor(6);
  outtextxy(10,450,'Tipo di conica: '+tipo);
  outtextxy(10,460,'Specie di conica: '+specie);
setcolor(9);
str(a:2:2,aa);str(b:2:2,bb);str(c:2:2,cc);str(d:2:2,dd);
str(e:2:2,ee);str(f:2:2,ff);
setcolor(2);
outtextxy(240,479-8,'Formula: '+aa+'x'+bb+'y'+cc+'y'+dd+'x'+ee+'y'+ff+'=0');
setcolor(15);
outtextxy(540,471-16,'INVIO Esci');
setcolor(3);
outtextxy(10,479-8,'Tasti: +/- Zoom '+chr(24)+chr(25)+chr(27)+chr(26)+' Sposta');
setcolor(7);
outtextxy(250,0,chr(4)+' CONICHE GENERALI'+chr(4));
setfillstyle(0,0);
repeat
  t:=' ';
  t:=readkey;
  osx:=sfasax;
  osy:=sfasay;
  ounita:=unita;
  case t of
    '+': unita:=unita*1.2;
    '-': unita:=unita/1.2;
    #75: sfasax:=sfasax+(1/unita*30);
    #77: sfasax:=sfasax-(1/unita*30);
    #80: sfasay:=sfasay+(1/unita*30);
    #72: sfasay:=sfasay-(1/unita*30);
  end;
  if unita>640 then unita:=640;
  if unita<=1 then unita:=1;
  if (sfasax<>osx) or (sfasay<>osy) or (unita<>ounita) then
  begin
    bar(1,11,getmaxx-1,getmaxy-31);
    grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,a,b,c,d,e,f);
  end;
until t=#13;
closegraph;
end;
BEGIN
(* presenta;*)
repeat
  comples:=false;
  immetti;
  casi;

```

```

attiva_grafica;
unita:=15;
colore:=12;
grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,a,b,c,d,e,f);
rosso;
textbackground(1);
textcolor(10);
clrscr;
gotoxy(10,11);write('Vuoi l'equazione canonica ? (S/N) ');
readln(r);
if (r='s') or (r='S') then
  begin
    a:=w;b:=0;c:=w1;d:=0;e:=w3;f:=w2;
    casi;
    attiva_grafica;
    unita:=15;
    colore:=12;
    grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,a,b,c,d,e,f);
    rosso;
  end;
textbackground(1);
textcolor(10);
clrscr;
gotoxy(10,11);write('Vuoi ripetere con altri coefficienti ? (S/N) ');
readln(risp);
risp:=upcase(risp);
until (risp='N');
END.

```

- 2) Questo programma oltre a tracciare il grafico di una conica, nota la sua equazione, e ha darti informazioni sul tipo e sulla specie, ti permette di effettuare una trasformazione lineare, nota la sua equazione, dandoti informazione sul tipo di trasformazione, e di tracciare il grafico della conica trasformata, dandoti la sua equazione.

```

PROGRAM trasformazioni_coniche_generali;
USES crt,graph;
const unita:real=20; passo:real=0.005; colore:byte=13;
      quadratura=1.077; min_unita_puntini=20;
      min_unita_tacche=10;
      sfasax:real=0; sfasay:real=0;
VAR xmin, xmax, ymin, ymax, x2, y2, xmed, ymed: integer;
    X,Y,a,b,c,d,e,f,rang,osx,osy,ounita:REAL;
    at,bt,ct,dt,et,ft:real;
    tipo,specie:string;
    comples:boolean;risp:char;

```

```

sin,des,su,giu,j,j1,j2,rx,ry:real;
s,aa,bb,cc,dd,ee,ff:string;

PROCEDURE trasformazione_coniche(aaxx,aaxy,aayy,aax,aay,afp:real);
var ar,br,cr,a1,b1,c1,det:real;
    a2,b2,c2,a21,b21,c21:real;
    a1xx,a1xy,a1yy,a1x,a1y,f1p:real;
begin
  clrscr;
  gotoxy(14,4);writeln('Immetti i coefficienti della trasformazione lineare: ');
  repeat
    gotoxy(22,6);write(' X" = (   )X + (   )Y + (   )');
    gotoxy(22,7);write(' Y" = (   )X + (   )Y + (   )');
    gotoxy(30,6);readln(ar);gotoxy(43,6);readln(br);gotoxy(56,6);readln(cr);
    gotoxy(30,7);readln(a1);gotoxy(43,7);readln(b1);gotoxy(56,7);readln(c1);
    det:=ar*b1-a1*br;
    if det=0 then begin
      gotoxy(14,4);writeln('Rimetti i coefficienti della trasformazione lineare: ');
      end;
    gotoxy(15,9);write('La trasformazione lineare introdotta risulta una: ');
  until det<>0;
  if (ar=b1/det) and (br=-a1/det) and (a1=-br/det) and (b1=ar/det) then
    begin
      IF det = 1 then
        begin
          gotoxy(26,11); write('ISOMETRIA DIRETTA      ');
          end;
        IF det = -1 then
          begin
            gotoxy(26,11); write('ISOMETRIA INVERSA    ');
            end;
          end else
            if (b1=ar) and (a1=0) and (br=0) and (ar>0) then
              begin
                gotoxy(26,11); write('OMOTETIA DIRETTA    ');
                gotoxy(27,13);write('di rapporto k = ',ar:3:2);
                end else
                  if (b1=ar) and (a1=0) and (br=0) and (ar<0) then
                    begin
                      gotoxy(26,11); write('OMOTETIA INVERSA    ');
                      gotoxy(27,13);write('di rapporto k = ',ar:3:2);
                      end else

```

```

if (b1=ar) and (br=-a1 )then
    begin
        gotoxy(26,11); write('SIMILITUDINE DIRETTA');
        gotoxy(27,13);write('di rapporto k = ',sqrt(sqr(ar)+sqr(br)):3:2);
    end else
if (b1=-ar) and (a1=br) then
    begin
        gotoxy(26,11); write('SIMILITUDINE INVERSA');
        gotoxy(27,13);write('di rapporto k = ',sqrt(sqr(ar)+sqr(br)):3:2);
    end else
    begin
        if deT>0 then
            begin
                gotoxy(26,11);write('AFFINITA" DIRETTA ');
                GOTOXY(27,13);WRITE('di rapporto k = ',det:3:2);
            end;
            if deT<0 then
                begin
                    gotoxy(26,11);write('AFFINITA" INVERSA ');
                    GOTOXY(27,13);WRITE('di rapporto k = ',det:3:2);
                end;
            END;
a2:=b1/det; b2:=-br/det; c2:=(br*c1-b1*cr)/det;
a21:=-a1/det; b21:=ar/det; c21:=- (ar*c1-a1*cr)/det;
gotoxy(22,15);write('La trasformazione inversa risulta : ');
gotoxy(22,17);write(' X = (',a2:3:2,')X" + (',b2:3:2,')Y" + (',c2:3:2,')');
gotoxy(22,18);write(' Y = (',a21:3:2,')X" + (',b21:3:2,')Y" + (',c21:3:2,')');
readln;
gotoxy(4,20);
write(' L"equazione della conica introdotta, soggetta a trasformazione, risulta: ');
a1xx:=aaxx*sqr(a2)+aaxy*a2*a21+aayy*sqr(a21);
a1xy:=2*aaxx*a2*b2+aaxy*(a2*b21+b2*a21)+2*aayy*a21*b21;
a1yy:=aaxx*sqr(b2)+aaxy*b2*b21+aayy*sqr(b21);
a1x:=2*aaxx*a2*c2+aaxy*(a2*c21+c2*a21)+2*aayy*a21*c21+aax*a2+aay*a21;
a1y:=2*aaxx*b2*c2+aaxy*(b2*c21+c2*b21)+2*aayy*b21*c21+aax*b2+aay*b21;
f1p:=aaxx*sqr(c2)+aaxy*c2*c21+aayy*sqr(c21)+aax*c2+aay*c21+afp;
gotoxy(10,22);
write('( ',a1xx:3:2,')X2 + ( ',a1xy:3:2,')XY + ( ',a1yy:3:2,')Y2 + ( ',a1x:3:2,')X + ( ',a1y:3:2,')Y +
( ',f1p:3:2,') = 0');
at:=a1xx;bt:=a1xy;ct:=a1yy;dt:=a1x;et:=a1y;ft:=f1p;
readln;
end;

```

```

PROCEDURE attiva_grafica;
var gd,gm:integer;
begin
  gd:=detect;
  initgraph(gd,gm,'c:\bgi');
  xmin:=0;ymin:=0;xmax:=getmaxx;ymax:=getmaxy;
  xmed:=(xmax-xmin) DIV 2;
  ymed:=(ymax-ymin) DIV 2;
END;
PROCEDURE presenta;
const lato=1000;
      q=640;
      l=480;
      xo=-500;
      yo=-500;
var xs,ys,resto:integer;
      x,y:real;
begin
  clrscr;
  attiva_grafica;
  setbkcolor(1);
  setcolor(10);
  settxtjustify(1,1);
  settxtstyle(1,0,3);
  outtextxy(320,80,'TRASFORMAZIONE DEL PIANO IN SE" ');
  settxtstyle(2,0,6);
  outtextxy(320,140,'applicata alle');
  settxtstyle(1,0,6);
  outtextxy(320,200,'CONICHE GENERALI');
  settxtstyle(2,0,5);
  outtextxy(320,260,'a cura del');
  settxtstyle(2,0,8);
  outtextxy(320,310,'Prof. VACCARO GIOVANNI');
  readln;
  for xs:=0 to 320 do
  begin
    x:=xo+lato/640*xs;
    x:=int(sqrt(abs(x)));
    for ys:=0 to l do
    begin
      y:=yo+lato/640*ys;
      y:=int(sqrt(abs(80+y)));
      resto:=round((x+y)) mod 16;
    end
  end
end

```

```

    putpixel (xs,ys,resto);
    putpixel (640-xs,ys,resto);
    end;
    end;
readln;
closegraph;
END;
FUNCTION conv_x(x: real): integer;
begin
    conv_x:=round((x+sfasax)*unita+xmed);
end;
FUNCTION conv_y(y: real): integer;
begin
    if (y>-ymax) and (y<ymax) then
        conv_y:=round(ymed-(y+sfasay)*unita*quadratura);(*quadratura*)
    end;
END;
FUNCTION FNR1(x: real ; a,b,c,d,e,f: real): real;
var delta,func:real;
begin
    func:=0;
    comples:=false;
    delta:=sqr(b)-4*a*c;
    if delta<>0 then
        begin
            rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
            ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
        end;
    if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b-sqrt(delta))/(2*c)*(x-rx)+ry
        else comples:=true;
    fnr1:=func;
END;
FUNCTION FNR11(y: real ; a,b,c,d,e,f: real): real;
var delta,func:real;
begin
    func:=0;
    comples:=false;
    delta:=sqr(b)-4*a*c;
    if delta<>0 then
        begin
            rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
            ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
        end;
    if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b+sqrt(delta))/(2*a)*(y-ry)+rx
        else comples:=true;

```

```

    fnr11:=func;
END;
FUNCTION FNR2(x : real ; a,b,c,d,e,f:real): real;
var delta,func:real;
begin
    func:=0;
    comples:=false;
    delta:=sqr(b)-4*a*c;
    if delta<>0 then
        begin
            rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
            ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
            end;
    if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b+sqrt(delta))/(2*c)*(x-rx)+ry
        else comples:=true;
    fnr2:=func;
END;
FUNCTION FNR22(y: real ; a,b,c,d,e,f:real): real;
var delta,func:real;
BEGIN
    func:=0;
    comples:=false;
    delta:=sqr(b)-4*a*c;
    if delta <> 0 then
        begin
            rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
            ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
            end;
    if (delta>0) and (c<>0) then func:=(-b-sqrt(delta))/(2*a)*(y-ry)+rx
        else comples:=true;
    fnr22:=func;
END;
FUNCTION FNY(x : real ; a,b,c,d,e,f:real): real;
var delta,func:real;
begin
    func:=0;
    comples:=false;
    delta:=sqr(b*x+e)-4*c*(a*sqr(x)+d*x+f);
    if (delta>=0) and (c<>0) then func:=(-b*x-e+sqrt(delta))/(2*c)
        else comples:=true;
    fny:=func;
END;
FUNCTION FNX(y : real ; a,b,c,d,e,f: real): real;

```

```

var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*y+d)-4*a*(c*sqr(y)+e*y+f);
  if (delta>=0) and (a<>0) then func:=(-b*y-d+sqrt(delta))/(2*a)
    else comples:=true;
  fnx:=func;
END;
FUNCTION FN2Y(x : real ; a,b,c,d,e,f:real): real;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*x+e)-4*c*(a*sqr(x)+d*x+f);
  if (delta>=0) and (c<>0) then func:=(-b*x-e-sqrt(delta))/(2*c)
  else comples:=true;
  fn2y:=func;
END;
FUNCTION FN2X(y : real ; a,b,c,d,e,f: real): real;
var delta,func:real;
BEGIN
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*y+d)-4*a*(c*sqr(y)+e*y+f);
  if (delta>=0) and (a<>0) then func:=(-b*y-d-sqrt(delta))/(2*a)
    else comples:=true;
  fn2x:=func;
END;
FUNCTION FN3Y(x: real ; a,b,c,d,e,f:real): real;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;
  delta:=sqr(b*x+e)-4*c*(a*sqr(x)+d*x+f);
  if (delta>=0) and (c=0) and (x<>0) then func:=(-(d*x+f)/(b*x+e))
  else comples:=true;
  fn3y:=func;
END;
FUNCTION FN3X(y: real ; a,b,c,d,e,f: real):real;
var delta,func:real;
begin
  func:=0;
  comples:=false;

```

```

delta:=sqr(b*y+d)-4*a*(c*sqr(y)+e*y+f);
if (delta>=0) and (a=0) and (y<>0) then func:=(-(e*y+f)/(b*y+d))
    else compl:=true;
fn3x:=func;
END;
PROCEDURE ASSI;
var ix,iy,ym,xm,nl:INTEGER;
begin
    xm:=xmed;
    ym:=ymed;
    setcolor(7);rectangle(0,0,xmax-xmin,ymax-ymin);
    setcolor(14);
    line(conv_x(0),ymax,conv_x(0),0);
    line(xmax-xmin,conv_y(0),0,conv_y(0));
    line(conv_x(0),0,conv_x(0)+5,0+7);
    line(conv_x(0),0,conv_x(0)-5,0+7);
    line(xmax-xmin,conv_y(0),xmax-xmin-7,conv_y(0)-5);
    line(xmax-xmin,conv_y(0),xmax-xmin-7,conv_y(0)+5);
    setcolor(10);
    sin:=-sfasax-(640/unita/2);
    des:=-sfasax+(640/unita/2);
    su:=-sfasay-(480/unita/2);
    giu:=-sfasay+(480/unita/2);
    if unita>min_unita_tacche then
    begin
    for ix:=round(sin+0.5) to round(des-0.5) do
        line(conv_x(ix),conv_y(0)-2,conv_x(ix),conv_y(0)+2);
    for iy:=round(su+0.5) to round(giu-0.5) do
        line(conv_x(0)-2,conv_y(iy),conv_x(0)+2,conv_y(iy));
    end;
    if unita>min_unita_puntini then
    for ix:=round(sin+0.5) to round(des-0.5) do
    for iy:=round(su+0.5) to round(giu-0.5) do
        putpixel(conv_x(ix),conv_y(iy),9);
    setcolor(7);rectangle(0,0,xmax-xmin,ymax-ymin);
END;
PROCEDURE grafico(xmn,ymn,xmx,ymx:integer; a,b,c,d,e,f:real);
var u:string;
begin
    xmax:=xmx;
    ymax:=ymx;
    xmin:=xmn;
    ymin:=ymn;

```

```

xmed:=(xmax-xmin) DIV 2;
ymed:=(ymax-ymin) DIV 2;
setviewport(xmin,ymin,xmax,ymax,clipon);
passo:=1/unita;
assi;
sin:=-sfasax-(640/unita/2);
des:=-sfasax+(640/unita/2);
su:=sfasay-(480/unita/2);
giu:=sfasay+(480/unita/2);
x:=sin+passo;
repeat
  x2:=conv_x(x);
  y2:=conv_y(Fny(x,a,b,c,d,e,f));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  x:=x+passo;
until x>des;
x:=sin+passo;
repeat
  x2:=conv_x(x);
  y2:=conv_y(Fn2y(x,a,b,c,d,e,f));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  x:=x+passo;
until x>des;
if (a=0) and (c=0) then
begin
x:=sin+passo;
repeat
  x2:=conv_x(x);
  y2:=conv_y(Fn3y(x,a,b,c,d,e,f));
  if not(comples) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
  x:=x+passo;
until x>des;
end;
x:=sin+passo;
repeat

```

```

x2:=conv_x(x);
y2:=conv_y(Fnr1(x,a,b,c,d,e,f));
if not(complex) then
begin
  putpixel(x2,y2,7);
end;
x:=x+passo;
until x>des;
x:=sin+passo;
repeat
  x2:=conv_x(x);
  y2:=conv_y(Fnr2(x,a,b,c,d,e,f));
  if not(complex) then
  begin
    putpixel(x2,y2,7);
  end;
  x:=x+passo;
until x>des;
passo:=1/(unita*quadratura);
y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fnx(y,a,b,c,d,e,f));
  y2:=conv_y((y));
  if not(complex) then
  begin
    putpixel(x2,y2,colore);
  end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
y:=su+passo;
REPEAT
  x2:=conv_x(fnr11(y,a,b,c,d,e,f));
  y2:=conv_y((y));
  if not(complex) then
  begin
    putpixel(x2,y2,colore);
  end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
y:=su+passo;
repeat
  y2:=conv_x(fnr22(y,a,b,c,d,e,f));
  y2:=conv_y((y));

```

```

if not(complex) then
  begin
    putpixel(x2,y2,colore);
  end;
  y:=y+passo;
until y>giu;
y:=su+passo;
repeat
  x2:=conv_x(fn2x(y,a,b,c,d,e,f));
  y2:=conv_y((y));
  if not(complex) then
    begin
      putpixel(x2,y2,colore);
    end;
    y:=y+passo;
until y>giu;
if (c=0) and (a=0) then
  begin
    y:=su+passo;
  repeat
    x2:=conv_x(fn3x(y,a,b,c,d,e,f));
    y2:=conv_y((y));
    if not(complex) then
      begin
        putpixel(x2,y2,colore);
      end;
      y:=y+passo;
  until y>giu;
end;
setcolor(10);
if (j1<>0) then
  circle(conv_x(rx),conv_y(ry),2);
setcolor(12);
if (a=0) and (c=a) and (b<>0) and ((e<>0) or (d<>0)) then
  begin
    setcolor(6);
    line(conv_x(-e/b),0,conv_x(-e/b),ymax);
    line(0,conv_y(-d/b),xmax,conv_y(-d/b));
  end;
setcolor(7);
outtextxy(xmax-xmin-15,conv_y(0)+5,'x');
outtextxy(conv_x(0)+5,10,'y');
outtextxy(conv_x(0)+5,conv_y(0)+5,'o');
setcolor(10);

```

```

str(unita:3:3,u);
outtextxy(xmax-xmin-110,ymax-ymin-10,'Unit...: '+u);
setviewport(0,0,getmaxx,getmaxy,clipoff);
end;
procedure immetti;
begin
  textbackground(1);
  clrscr;
  textcolor(15);
  gotoxy(10,4);
  write('Questo programma ti permette di tracciare il grafico di');
  textcolor(4);
  gotoxy(30,6);
  writeln(' '+chr(4)+' CONICHE GENERALI '+chr(4));
  textcolor(15);
  gotoxy(10,8); write('nota la sua equazione, dandoti informazioni sul tipo e');
  gotoxy(10,9); write(' sulla specie, anche nei casi degeneri. ');
  gotoxy(10,10); write('Inoltre ti permette di effettuare una trasformazione della conica');
  textcolor(14);
  gotoxy(10,12); writeln(' Inserisci i sei coefficienti dell"equazione generale:');
  textcolor(11);
  gotoxy(11,15); writeln(' x2+ ( )xy + ( )y2+ ( )x + ( )y + ( ) = 0');
  gotoxy(12,15);readln(a);
  gotoxy(20,15);readln(b);
  gotoxy(30,15);readln(c);
  gotoxy(39,15);readln(d);
  gotoxy(48,15);readln(e);
  gotoxy(57,15);readln(f);
  j:=a*c*f+b/2*e/2*d/2+d/2*b/2*e/2-(d/2*d/2*c+a*e/2*e/2+b/2*b/2*f);
  j1:=a*c-b/2*b/2;
  j2:=a+c;
  if (4*a*c-b*b<>0) then
    begin
      rx:=(b*e-2*c*d)/(4*a*c-b*b);
      ry:=(b*d-2*a*e)/(4*a*c-b*b);
    end;
end;
procedure casi(a,b,c,d,e,f:real);
begin
  if j<>0 then rang:=3
  else
  if (j1<>0) or (b*e-2*d*c <>0) or (4*c*f-e*e<>0) or (4*a*f-d*d<>0)
  or (2*b*f-d*e<>0)

```

```

then rang:=2
  else
if (j2<>0) then rang:=1;
if rang=3 then begin
  tipo:='Conica non degenerare non spezzata' end
  else begin
if (j1>0) then tipo:='Ellisse degenerare e precisamente degenera in';
if (j1>0) and (a=c) then
  tipo:='Circonferenza degenerare e precisamente degenera in';

if (j1=0) then tipo:='Parabola degenerare e precisamente degenera in';
if (j1<0) then tipo:='Iperbole degenerare e precisamente degenera in';
end;
if (rang=3) and (a=c) and (b=0) and ((j>0) and (j1>0) and (j2>0)) or
  ((j<0) and (j1>0) and (j2<0))
  then tipo:='Circonferenza priva di parte reale';
if (rang=3) and ((j>0) and (j1>0) and (j2>0)) or
  ((j<0) and (j1>0) and (j2<0))
  then tipo:='Ellisse priva di parte reale';
if (rang=3) and ((j>0) and (j1>0) and (j2<0)) or
  ((j<0) and (j1>0) and (j2>0))
  then
  begin
if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Ellisse dotata di parte reale traslata e ruotata';
if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Ellisse dotata di parte reale ruotata';
if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Ellisse dotata di parte reale traslata';
if (b=0) and (a=c) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Circonferenza traslata';
if (b=0) and (a=c) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Circonferenza centrata';
if (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f<0) then
specie:='Ellisse centrata o canonica';
end;
if (rang=3) and ((j>0) and (j1=0) and (j2<0)) or
  ((j<0) and (j1=0) and (j2>0))
  then
  begin
if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Parabola traslata e ruotata';
if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then

```

```

specie:='Parabola ruotata';
  if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Parabola traslata';
  end;
if (rang=3) and (j1<0) and (j2=0)
  then
    begin
      if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole equilatera traslata e ruotata';
      if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Iperbole equilatera ruotata';
      if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole equilatera traslata';
      if (b=0) and ((d=0) or (e=0)) then
specie:='Iperbole equilatera riferita agli assi';
      if (b<>0) and((a=0) and (c=0)) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole equilatera omografica riferita agli asintoti';
      if (b<>0) and ((a=0) and (c=0)) and ((d=0) or (e=0)) then
specie:='Iperbole equilatera riferita agli asintoti';
    end;
if (rang=3) and ((j<>0) and (j1<0) and (a<-c))
  then
    begin
      if (b<>0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole non equilatera traslata e ruotata';
      if (b<>0) and ((d=0) and (e=0)) then
specie:='Iperbole non equilatera ruotata';
      if (b=0) and ((d<>0) or (e<>0)) then
specie:='Iperbole non equilatera traslata';
      if (b=0) and ((d=0) or (e=0)) then
specie:='Iperbole non equilatera centrata';
    end;
if (j<>0) and (b=0) and (a=c) and (d=0) and (e=0) and (f>0) then
  specie:='Coppia di rette immaginarie coniugate non parallele';
if (rang=2) and (j1>0) and (j2<>0)
then specie:='Coppia di rette immaginarie coniugate non parallele';
if (rang=2) and (j1<0) and (j2=0)
  then specie:='Coppia di rette reali non parallele ma perpendicolari';
if (rang=2) and (j1<0) and (j2<>0)
  then specie:='Coppia di rette reali non parallele ne perpendicolari';
if (j=0) and (j1<0) and (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f=0) then
  specie:='Coppia di rette reali incidenti';
if (j=0) and (j1<0) and (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f=0) and (a=-c) then

```

```

    specie:='Coppia di rette reali incidenti e perpendicolari';
if (j=0) and (j1>0) and (b=0) and (d=0) and (e=0) and (f=0) then
    specie:='Coppia di rette immaginarie';
if (rang=2) and (j1=0) and (j2<>0)
    then specie:='Coppia di rette parallele (reali od immaginarie) entrambe proprie';
if (rang=2) and (j1=0) and (j2=0)
    then specie:='Coppie di rette reali (parallele o perpendicolari) non entrambe proprie';
if (rang=1) and (j1=0) and (j2<>0)
then begin if (d=0) and (e=0) and (f=0)
    then specie:='Retta doppia (reale) propria ';
    if (d<>0) or (e<>0) or (f<>0) then
        specie:='Coppia di rette parallele e distinte ( reali o no )';
    end;
if (rang=1) and (j1=0) and (j2=0) then specie:='Retta doppia impropria';
end;
var t:char;
begin
clrscr;
presenta;
repeat
    comples:=false;
    immetti;
    gotoxy(10,18);
    writeln('Vuoi operare una trasformazione del piano in sè e verificare');
    gotoxy(10,19);
    writeln('come si trasforma la tua conica sia nell"equazione che nel grafico');
    gotoxy(10,20);
    writeln('
                Rispondere (S o N)');
    gotoxy(38,21);
    readln(risp);
    clrscr;
    risp:=upcase(risp);
    if risp='S' then trasformazione_coniche(a,b,c,d,e,f);
    casi(a,b,c,d,e,f);
    attiva_grafica;
    unita:=15;
    colore:=12;
    grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,a,b,c,d,e,f);
    setrgbpalette(1,0,0,20);
    setfillstyle(1,1);
    bar(0,getmaxy-30,getmaxx,getmaxy);
    bar(0,0,getmaxx,9);
    setcolor(6);
    outtextxy(10,450,'Tipo di conica: '+tipo);

```

```

    outtextxy(10,460,'Specie di conica: '+specie);
setcolor(9);
str(a:2:2,aa);str(b:2:2,bb);str(c:2:2,cc);str(d:2:2,dd);
str(e:2:2,ee);str(f:2:2,ff);
setcolor(2);
outtextxy(240,479-8,'Formula: '+aa+'x2+'+bb+'xy+'+cc+'y2+'+dd+'x+'+ee+'y+'+ff+'=0');
setcolor(15);
outtextxy(540,455,'INVIO Esci');
setcolor(3);
outtextxy(10,479-8,'Tasti: +/- Zoom '+chr(24)+chr(25)+chr(27)+chr(26)+' Sposta');
setcolor(7);
outtextxy(250,0,chr(4)+' CONICHE GENERALI'+chr(4));
setfillstyle(0,0);
if risp='S' then
    begin
        colore:=14;
        readln;
        grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,at,bt,ct,dt,et,ft);
        casi(at,bt,ct,dt,et,ft);
        setrgbpalette(1,0,0,20);
setfillstyle(1,1);
bar(0,getmaxy-30,getmaxx,getmaxy);
bar(0,0,getmaxx,9);
setcolor(6);
        outtextxy(10,450,'Tipo di conica: '+tipo);
        outtextxy(10,460,'Specie di conica: '+specie);
setcolor(9);
str(at:2:2,aa);str(bt:2:2,bb);str(ct:2:2,cc);str(dt:2:2,dd);
str(et:2:2,ee);str(ft:2:2,ff);
setcolor(2);
outtextxy(240,479-8,'Formula: '+aa+'xy+'+bb+'xy+'+cc+'yy+'+dd+'x+'+ee+'y+'+ff+'=0');
setcolor(15);
outtextxy(540,455,'INVIO Esci');
setcolor(3);
outtextxy(10,479-8,'Tasti: +/- Zoom '+chr(24)+chr(25)+chr(27)+chr(26)+' Sposta');
setcolor(7);
outtextxy(250,0,chr(4)+' CONICHE GENERALI'+chr(4));
setfillstyle(0,0);
end;
repeat
    t:=' ';
    t:=readkey;
    osx:=sfasax;

```

```

osy:=sfasay;
ounita:=unita;
case t of
  '+': unita:=unita*1.2;
  '-': unita:=unita/1.2;
#75: sfasax:=sfasax+(1/unita*30);
#77: sfasax:=sfasax-(1/unita*30);
#80: sfasay:=sfasay+(1/unita*30);
#72: sfasay:=sfasay-(1/unita*30);
end;
if unita>640 then unita:=640;
if unita<=1 then unita:=1;
if (sfasax<>osx) or (sfasay<>osy) or (unita<>ounita) then
begin
  bar(1,11,getmaxx-1,getmaxy-31);
  colore:=12;
  grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,a,b,c,d,e,f);
  colore:=14;
  if risp='S' then
    grafico(0,10,getmaxx,getmaxy-31,at,bt,ct,dt,et,ft);
  end;
until t=#13;
closegraph;
textbackground(1);
textcolor(10);
clrscr;
gotoxy(10,11);write('Vuoi ripetere con altri coefficienti ? (S/N) ');
readln(risp);
risp:=upcase(risp);
until (risp='N');
END.

```

3)

```

program PROIETTIVITA_OMOLOGICA_DI_CONICHE;
uses crt,graph;
var t,yt,k,h,yt1,m,q:real;
    i,xo,yo,x2,y2,x3,x31,y3,y31,y21:integer;
    xs,ys,p1,p2,p3,a,b,c,d,e,g:integer;
PROCEDURE coefficienti;
begin
  gotoxy(12,1);writeln('PROIETTIVITA" OMOLOGICA');

```

```

gotoxy(12,3);writeln('Immetti i coefficienti della conica. ');
gotoxy(12,5);write(' x2+ xy+ y2+ x+ y+ =0');
gotoxy(14,5);readln(a);
gotoxy(20,5);readln(b);
gotoxy(27,5);readln(c);
gotoxy(34,5);readln(d);
gotoxy(40,5);readln(e);
gotoxy(46,5);readln(g);
if b*b-4*a*c>0 then begin gotoxy(12,7);write('La conica è un"iperbole');end;
if b*b-4*a*c=0 then begin gotoxy(12,7);write('La conica è una parabola');end;
if b*b-4*a*c<0 then begin gotoxy(12,7);write('La conica è un"ellisse'); end;
if ( b*b-4*a*c<0) and (b=0) and (a=c) then
begin gotoxy(12,7);write('La conica è una circonferenza'); end;
END;
FUNCTION f1(x:real):real;
begin
if (sqr(b*x+e)-4*c*(a*x*x+d*x+g)>=0) and (c<>0) then
f1:=(-(b*x+e)+sqrt(sqr(b*x+e)-4*c*(a*x*x+d*x+g)))/(2*c);
if (sqr(b*x+e)-4*c*(a*x*x+d*x+g)>=0) and (c=0) then
f1:=(-a*x*x-d*x-g)/(b*x+e);
END;
FUNCTION f2(x:real):real;
begin
if (sqr(b*x+e)-4*c*(a*x*x+d*x+g)>=0) and (c<>0) then
f2:=(-(b*x+e)-sqrt(sqr(b*x+e)-4*c*(a*x*x+d*x+g)))/(2*c);
if (sqr(b*x+e)-4*c*(a*x*x+d*x+g)>=0) and (c=0) then
f2:=(-a*x*x-d*x-g)/(b*x+e);
END;
PROCEDURE.opengraf;
var gd,gm:integer;
begin
gd:=detect;
initgraph(gd,gm,'c:\bgi');
if graphresult <>gok then halt(1);
END;
PROCEDURE.immetti;
begin
gotoxy(12,8);writeln('Immetti le coordinate del centro di omologia :S = ');
gotoxy(63,8);readln(xs,ys);
gotoxy(12,10);writeln('Immetti i coefficienti dell"asse : x + y + = 0 ');
gotoxy(48,10);readln(p1);
gotoxy(55,10);readln(p2);
gotoxy(62,10);readln(p3);

```

```

gotoxy(12,12);Writeln('Immetti il valore di k di allineamento : ');
gotoxy(52,12);readln(k);
h:=-p1*xs-p2*ys-p3-k;
END;
FUNCTION fx(x,y:real):real;
begin
  if (p1*x+p2*y+p3+h)<>0 then
    fx:= xs+h*(x-xs)/(p1*x+p2*y+p3+h);
  END;
FUNCTION fy(x,y:real):real;
begin
  if (p1*x+p2*y+p3+h)<>0 then
    fy:= ys+h*(y-ys)/(p1*x+p2*y+p3+h);
  END;
begin
  clrscr;
  coefficienti;
  immetti;
 .opengraf;
  xo:=320; yo:=240;
  setcolor(15);
  line(0,yo,640,yo);line(xo,0,xo,480);
  for i:=1 to 16 do
    begin
      line(xo-20*i,yo-1,xo-20*i,yo+1);
      line(xo+20*i,yo-1,xo+20*i,yo+1);
    end;
  for i:=1 to 12 do
    begin
      line(xo-1,yo-20*i,xo+1,yo-20*i);
      line(xo-1,yo+20*i,xo+1,yo+20*i);
    end;
  setfillstyle(1,14);
  circle(xo+20*xs,yo-20*ys,2);
  t:=-32;
  while t<=32 do
    begin
      if (p2 <> 0) and ( p1<>0) then begin m:=-p1/p2; q:=-p3/p2;
      yt:=m*t+q;
      if (yt<=480) and (fy(t,yt)<480) and(fx(t,yt)<640) then
        begin
          x2:=round(xo+20*t);
          y2:=round(yo-20*yt);
          putpixel(x2,y2,2);

```

```

    end; end;
    if (p2 = 0) and (p1 <> 0) then line(xo+round(-20*p3/p1),1,xo+round(-20*p3/p1),480);
    if (p2 <> 0) and (p1 = 0) then
        line(round(xo+20*t),yo-round(-20*p3/p2),round(xo+20*t),yo-round(-20*p3/p2));
        t:=t+0.01;
    end;
setcolor(12);
t:=-24;
while t<=24 do
    begin
        yt:=f1(t);
        yt1:=f2(t);
        if (yt<=480) and (fy(t,yt)<480) and (fx(t,yt)<640) then
            begin
                x2:=round(xo+20*t);
                y2:=round(yo-20*yt);
                y21:=round(yo-20*yt1);
                putpixel(x2,y2,11);
                putpixel(x2,y21,11);
            end;
            t:=t+0.01;
        end;
t:=-24;
while t<=24 do
    begin
        yt:=f1(t);
        yt1:=f2(t);
        if (yt<=480) and (fy(t,yt)<480) and (fx(t,yt)<640) then
            begin
                x3:=round(xo+20*fx(t,yt));
                x31:=round(xo+20*fx(t,yt1));
                y3:=round(yo-20*fy(t,yt));
                y31:=round(yo-20*fy(t,yt1));
                putpixel(x3,y3,14);
                putpixel(x31,y31,14);
            end;
            t:=t+0.01;
        end;
    readln;
closegraph;
END.

```

BIBLIOGRAFIA

Enciclopedie

- | | | | |
|----|--|---------------------|--------|
| 1) | Dizionario Enciclopedico di Scienza e Tecnica | Fratelli Fabbri Ed. | Milano |
| 2) | E.S.T Enciclopedia della Scienza e delle Tecnica | Mondadori | Milano |

Manuali di Storia della Matematica

- | | | | |
|----|--|------------------------|---------|
| 1) | Boyer Carl B. Storia della matematica | Oscar Studio Mondadori | Milano |
| 2) | Enriques F.- De Santillana G. Storia del pensiero scientifico. Il mondo antico | Zanichelli | Bologna |
| 3) | Frajese A. La matematica nel mondo antico | Ed. Studium | Milano |
| 4) | Loria G. Storia delle matematiche | Hoepli | Milano |
| 5) | Maracchia S. Da Cardano a Galois | Feltrinelli | Milano |

Testi Universitari

- | | | | |
|----|---|----------------------------|---------|
| 1) | Abeasis S. Algebra lineare e Geometria | Zanichelli | Bologna |
| 2) | Campedelli L. Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva | CEDAM | Padova |
| 3) | Castelnuovo G. Geometria Analitica e Geometria Proiettiva | Albrighi, Segati & C | Roma |
| 4) | Cerasoli Eugeni Protasi Elementi di Matematica Discreta | Zanichelli | Bologna |
| 5) | Franchetta A. Algebra lineare e Geometria Analitica | Liguori Ed. | Napoli |
| 6) | Lang S. Algebra lineare | Bollati Boringhieri | Torino |
| 7) | Longo C. Lezioni di Geometria | Lib. Eredi Virgilio Veschi | Roma |
| 8) | Manara Perotti Scapellato Geometria e Algebra Lineare | Ed. Esculapio | Bologna |

Testi scolastici

- | | | | |
|----|--|------------------------------|--------|
| 1) | Dodero-Baroncini-Manfredi Elementi di Matematica | Ghisetti e Corvi Ed. | Milano |
| 2) | Lamperti-Mereu-Nanni Lezioni di Matematica | E.T.A.S. | |
| 3) | Maraschini-Palma Format, SPE | Paravia B. Mondadori Editori | |
| 4) | Zwirner- Scaglianti Strutture-Funzioni | CEDAM | Padova |

INDICE

Introduzione

CAPITOLO I : Geometria euclidea e coniche

1	Introduzione	1
	Richiami generali di Stereometria – Superficie conica e cono – Superficie sferica e sfera – Sezione conica	
2	Ellisse	8
	Preliminari – Prima definizione secondo Apollonio – Relazione di Apollonio ed equazione - Seconda definizione come luogo geometrico: <i>somma di distanze</i> – Relazione ed equazione – Terza definizione come luogo geometrica: <i>rapporto di distanze</i> – Relazione ed equazione - Conclusione	
3	Circonferenza	21
	Preliminari – Ricerca relazione fondamentale ed equazione	
4	Parabola	24
	Preliminari – Prima definizione secondo Apollonio – Relazione di Apollonio ed equazione - Seconda definizione come luogo geometrico: <i>uguaglianza di distanze</i> – Relazione ed equazione – Terza definizione come luogo geometrica: <i>rapporto di distanze</i> – Relazione ed equazione – Conclusione	
5	Iperbole	31
	Preliminari – Prima definizione secondo Apollonio – Relazione di Apollonio ed equazione - Seconda definizione come luogo geometrico: <i>differenza di distanze</i> – Relazione ed equazione – Terza definizione come luogo geometrica: <i>rapporto di distanze</i> – Relazione ed equazione – Iperbole equilatera - Conclusione	
6	Sintesi ed osservazioni	43
7	Appendice	46
	Tre problemi di Euclide – Lettura – Duplicazione del cubo	

CAPITOLO II : Geometria Analitica , Goniometria e coniche

1	Introduzione ed elementi di geometria analitica	53
	Premesse – Relazione di ascissa e ascissa di un punto – Coordinate cartesiane e sistema cartesiano nel piano – Prerequisiti di geometria analitica	
2	Coniche canoniche	58
	- Generalità	
	- Ellisse: definizione, equazione, analisi e ruolo dei parametri, punti notevoli, segmenti notevoli e rette notevoli	
	- Circonferenza: definizione ed equazione	
	- Parabola: definizione, equazione, analisi e ruolo dei parametri, punti notevoli, segmenti notevoli e rette notevoli	
	- Iperbole: definizione, equazione, analisi e ruolo dei parametri, punti notevoli, segmenti notevoli e rette notevoli – Iperbole equilatera	
	- Coniche degenerate	
3	Condizioni per determinare l'equazione di una conica canonica	72
4	Costruzione grafica di una conica canonica	75
	- Tracciamento geometrico-analitico	
	- Tracciamento meccanico	
5	Goniometria	81
	Funzioni circolari: Definizioni – Relazioni fondamentali – Grafici – Formule fondamentali – funzioni inverse e loro grafici	
	Funzioni iperboliche: Definizioni – Relazioni fondamentali – Grafici – Formule fondamentali – funzioni inverse e loro grafici	
6	Coordinate e sistema polare	89
	Definizione – Formule di conversione da coordinate polari a coordinate cartesiane e viceversa – Equazione polare delle coniche canoniche e ruolo dell'eccentricità e	
7	Coordinate parametriche	93
	Definizione – Formule di conversione da coordinate parametriche a coordinate cartesiane – Equazioni parametriche delle coniche canoniche	

CAPITOLO III : Trasformazioni del piano in sé - Dalla forma canonica alla forma generale e viceversa

1 Trasformazione del piano in sé 95

Caratteri generali sulle trasformazioni del piano in sé: definizione, equazioni, punti e rette unite, invarianti.

2 Trasformazioni isometriche 97

Definizione – Proprietà invarianti – Equazione generale con condizioni –
Principali tipi di trasformazioni isometriche:

-) Identità : Definizione, proprietà ed equazione
-) Simmetria centrale: Definizione, proprietà ed equazione
-) Simmetria assiale: Definizione, proprietà ed equazione
-) Traslazione: Definizione, proprietà ed equazione
-) Rotazione: Definizione, proprietà ed equazione

Composizione di trasformazioni isometriche:

-) Glissosimmetria: Definizione
-) Rototraslazione: Definizione

3 Coniche isometriche 104

-) Ellisse dalla forma canonica alla forma generale mediante
Simmetria centrale ed assiale, traslazione,
rotazione.
Equazioni e sintesi
-) Parabola dalla forma canonica alla forma generale mediante
Simmetria centrale ed assiale, traslazione,
rotazione.
Equazione e sintesi
-) Iperbole dalla forma canonica alla forma generale mediante
Simmetria centrale ed assiale, traslazione,
rotazione
- iperbole equilatera - iperbole omografica
Equazione e sintesi
-) Circonferenza forma canonica alla forma generale mediante
Simmetria centrale ed assiale, traslazione,
rotazione.
Equazione e sintesi
-) Sintesi generale

4 Trasformazione omotetica e simile 118

-) Trasformazione omotetica: - Definizione - Proprietà generali -
Coniche omotetiche:
Ellisse, parabola, iperbole e circonferenza
Equazione generale e sintesi
-) Trasformazione simile o similitudine: - Definizioni - Proprietà generali -
Coniche simili:
Ellisse, parabola, iperbole e circonferenza
Equazioni e sintesi

5 Trasformazione affine e proiettiva 131

-) Trasformazione affine o affinità: - Definizioni - Proprietà generali -
Coniche affini:
Ellisse, parabola, iperbole e circonferenza
Equazioni e sintesi
-) Affinità omologica od omologia: - Definizioni - Proprietà - Equazioni
-) Proiettività omologica: - Definizioni - Proprietà - Equazioni
-) Trasformazione proiettiva o proiettività: - Definizioni - Proprietà - Equazioni

6 Dall'equazione generale all'equazione canonica 137

Teoria ed esercizi svolti

7 Appendice 149

Uso cambio di variabile in Algebra

CAPITOLO IV: Elementi caratteristici di una conica

1 Nozioni di Geometria Proiettiva 151

Punti impropri e rette improprie – Retta Ampliata – Piano Ampliato
Coordinate omogenee sul piano – Equazione della retta e della conica generale in coordinate omogenee – Forma bilineare associata ad una conica – Retta polare di una conica

2 Elementi caratteristici di una conica 153

Diametro – Diametri coniugati – Diametri ortogonali
- Ellisse ed iperbole : - Ricerca delle coordinate del centro – Ricerca delle equazione degli assi – Ricerca coordinate dei vertici – Indicazioni operative per la ricerca delle coordinate

dei fuochi e delle equazioni delle direttrici – Ricerca delle equazioni degli asintoti di un'iperbole

- Parabola : Ricerca equazione dell'asse – Ricerca coordinate del vertice - Indicazioni operative per la ricerca delle coordinate dei fuochi e delle equazioni delle direttrici

3 Posizione reciproca di una retta

o di un punto rispetto ad una conica 159

Posizione di una retta rispetto ad una conica – Retta tangente ad una conica – Posizione di un punto rispetto ad una conica

4 Nozioni di Algebra lineare: Matrici. 166

Definizioni di : - Matrice – Matrice nulla – Matrice opposta- Matrice trasposta – Matrici uguali – Matrici conformi – Matrice quadrata ed ordine di una matrice – Matrice diagonale – Matrice unità od Identità – Matrice triangolare inferiore e superiore – Matrice simmetrica ed emisimmetrica -

Operazioni con le matrici:

Addizione tra matrici e sue proprietà

Moltiplicazione di uno scalare per una matrice e sue proprietà

Moltiplicazione riga per colonna tra matrici

Determinante di una matrice quadrata : definizione – Minore complementare e complemento algebrico – Teorema di Laplace e Calcolo del determinante - Proprietà dei determinanti

Matrice Inversa : definizione e calcolo – Matrice singolare : definizione – Matrice ortogonale : definizione e proprietà – Matrici simili: definizione e Teorema spettrale – Matrice caratteristica e polinomio caratteristico – Autovalori ed auto vettori.

Rango di una matrice quadrata – Traccia di una matrice quadrata

Diagonalizzazione di una matrice quadrata: definizione e teoremi

Ortonormalizzazione di una matrice quadrata: definizione e teoremi

Esercizi guida

5 Applicazione delle matrici alle coniche 176

Invarianti ortogonali di una conica – Classificazione delle coniche mediante gli invarianti –

Ricerca dell'equazione canonica di una conica data in forma generale –

Ricerca degli elementi caratteristici di una conica col metodo degli invarianti:

- Ellisse ed iperbole : - Ricerca delle coordinate del centro – Ricerca delle equazione degli assi – Ricerca coordinate dei vertici – Indicazioni operative per la ricerca delle coordinate dei fuochi e delle equazioni delle direttrici – Ricerca delle equazioni degli asintoti di un'iperbole
- Parabola : Ricerca equazione dell'asse – Ricerca coordinate del vertice - Indicazioni operative per la ricerca delle coordinate dei fuochi e delle equazioni delle direttrici

Esercizi guida.

CAPITOLO V : Proprietà metriche e problemi sulle coniche

1	Parabola	195
-	Area del segmento parabolico	
-	Sottotangente, sottonormale e proprietà relative a fuoco, direttrici e rette tangenti	
-	Proprietà generali sulla parabola	
2	Iperbole	208
-	Area che sottende un arco di iperbole equilatera	
-	Proprietà generali sull'iperbole	
3	Ellisse	224
-	Area dell'ellisse secondo Keplero	
-	Proprietà generali sull'ellisse	
-	Iperbole ed ellisse	
-	Triangoli isoperimetrici	
4	Circonferenza	240
-	Area del cerchio secondo Keplero	
-	Circonferenza di Apollonio	
-	Posizione di una retta rispetto ad una circonferenza	
-	Angolo fra retta e circonferenza e tra due circonferenze che si intersecano	
-	Circonferenze notevoli:	
	. Circonferenza dei nove punti e sue applicazioni	
	. Circonferenza di Mathieu	
5	Appendice	245
-	Sul concetto di diametro di una conica	

CAPITOLO VI : Miscellanea

1	Fascio di coniche	249
-	Caratteri generali - Intersezione di due coniche - Punti base e coniche generatrici	
-	Metodo dei fasci per la ricerca del fuoco di una conica	
-	Fascio di parabole: casistica	
-	Fascio di circonferenze: casistica, asse radicale	
2	Luoghi geometrici connessi a coniche	266

- Asse centrale - Versiera di Agnesi - Quadrilatero completo e conica dei nove punti
- Curve d'ordine superiore al secondo
 - . Cissoide di Diocle: definizione, equazione, grafico e applicazione alla duplicazione del cubo
 - . Concoide della retta: definizione, equazione, grafico e applicazione alla trisezione dell'angolo
 - . Concoide del cerchio: definizione, equazione, grafico e applicazione alla trisezione dell'angolo
 - . Trisettrice di Ippia o quadratrice di Dinostrato: definizione, equazione, grafico ed applicazione alla trisezione dell'angolo e alla quadratura del cerchio
- Curve trascendenti
 - . Cicloide: definizione, equazione e grafico
 - . Spirale di Archimede: Definizione, confronto con la parabola, equazione, grafico e applicazione alla trisezione dell'angolo e alla quadratura del cerchio

3 Inviluppo, evoluta ed evolvente 285

- Inviluppo: definizione, equazione e regola.
- Evoluta ed evolvente: definizione, equazione e regola
- Curvatura e centro di curvatura: Definizione ed equazione
- Esercizi guida
-

4 Curve deducibili dalle equazioni delle coniche 294

- Teoria ed Esercizi guida

5 Inversione circolare 296

- Definizione e proprietà - Punti uniti e figure unite ed equazioni
- Curve trasformate della parabola, dell'ellisse
- Problema di Pappo

Appendice: Programmi in Turbo Pascal 301

Bibliografia 333